

# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

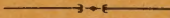
POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

**RAYMOND COMOLET**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
AGRÉGÉ DE PHYSIQUE



## 1<sup>re</sup> THÈSE

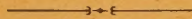
RECHERCHES SUR LA GENÈSE DE LA TURBULENCE  
DANS LES CONDUITES EN CHARGE

## 2<sup>e</sup> THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

INFLUENCE DE LA VISCOSITÉ  
SUR LA PROPAGATION DES ONDES DE PRESSION DANS LES CONDUITES

*Soutenues le 14 juin 1950 devant la Commission d'Examen*



|      |   |              |   |             |
|------|---|--------------|---|-------------|
| Jury | { | MM. A. FOCH, | { | Président.  |
|      |   | J. PÉRÈS     |   | Examineurs. |
|      |   | A. FORTIER   |   |             |



# THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES  
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

**RAYMOND COMOLET**

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
AGRÉGÉ DE PHYSIQUE



## 1<sup>re</sup> THÈSE

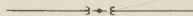
RECHERCHES SUR LA GENÈSE DE LA TURBULENCE  
DANS LES CONDUITES EN CHARGE

## 2<sup>e</sup> THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

INFLUENCE DE LA VISCOSITÉ  
SUR LA PROPAGATION DES ONDES DE PRESSION DANS LES CONDUITES

*Soutenues le 14 juin 1950 devant la Commission d'Examen*



|      |   |              |   |               |
|------|---|--------------|---|---------------|
| Jury | { | MM. A. FOCH, | { | Président.    |
|      |   | J. PÉRÈS     |   | Examinateurs. |
|      |   | A. FORTIER   |   |               |



RECHERCHES SUR LA GENÈSE DE LA TURBULENCE  
DANS LES CONDUITES EN CHARGE

---



# FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen . . . . . M. A. CHATELET

## PROFESSEURS

|                                        |   |                                                   |                                     |   |                                                   |
|----------------------------------------|---|---------------------------------------------------|-------------------------------------|---|---------------------------------------------------|
| G. JULIA . . . . .                     | T | Analyse supérieure et algèbre supérieure.         | ROCARD . . . . .                    | T | Physique.                                         |
| A. DENJOY . . . . .                    | T | Théorie des fonctions.                            | H. CARTAN . . . . .                 | T | Mathématiques générales.                          |
| L. LUTAUD . . . . .                    | T | Géographie physique et géologie dynamique.        | SCHAEFFER . . . . .                 | T | Physiologie des fonctions.                        |
| E. DARMOIS . . . . .                   | T | Enseignement de physique.                         | LAFFITTE . . . . .                  | T | Chimie (P.C.B.).                                  |
| Robert LÉVY . . . . .                  | T | Physiologie comparée.                             | FAVARD . . . . .                    |   | Calcul des probabilités et physique-mathématique. |
| Henri VILLAT . . . . .                 | T | Mécanique des fluides et applications.            | COULOMB . . . . .                   | T | Physique du globe.                                |
| Ch. JACOB . . . . .                    | T | Géologie.                                         | M <sup>lle</sup> COUSIN . . . . .   | T | Biologie animale (P.C.B.).                        |
| P. PASCAL . . . . .                    | T | Chimie générale.                                  | CHRÉTIEN . . . . .                  |   | Chimie (P.C.B.).                                  |
| M <sup>me</sup> RAMART-LUCAS . . . . . | T | Chimie organique.                                 | P. DRACH . . . . .                  |   | Zoologie.                                         |
| FOCH . . . . .                         | T | Mécanique physique et expérimentale.              | KASTLER . . . . .                   |   | Physique.                                         |
| PAUTHENIER . . . . .                   | T | Électrotechnique générale.                        | CHATELET . . . . .                  | T | Arithmétique et théorie des nombres.              |
| DE BROGLIE . . . . .                   | T | Théories physiques.                               | EPHRUSSI . . . . .                  | T | Génétique.                                        |
| JOB . . . . .                          | T | Chimie générale.                                  | WURMSER . . . . .                   | T | Biologie physico-chimique.                        |
| PRENANT . . . . .                      | T | Anatomie et histologie comparées.                 | BAUER . . . . .                     | T | Chimie-physique.                                  |
| COMBES . . . . .                       | T | Physiologie végétale.                             | RIVIÈRE . . . . .                   |   | Géologie (P.C.B.).                                |
| GARNIER . . . . .                      | T | Géométrie supérieure.                             | GAUTHERET . . . . .                 |   | Biologie végétale (P.C.B.).                       |
| PÉRÈS . . . . .                        | T | Mécanique rationnelle.                            | LUCAS . . . . .                     |   | Physique.                                         |
| HACKSPILL . . . . .                    | T | Chimie minérale.                                  | A. THOMAS . . . . .                 |   | Évolution des êtres organisés.                    |
| LAUGIER . . . . .                      | T | Physiologie générale.                             | ARNULF . . . . .                    |   | Optique appliquée.                                |
| TOUSSAINT . . . . .                    | T | Technique aéronautique.                           | MAX MORAND . . . . .                |   | Physique.                                         |
| M. CURIE . . . . .                     | T | Physique (P.C.B.).                                | SOLEILLET . . . . .                 |   | Physique.                                         |
| G. RIBAUD . . . . .                    | T | Hautes températures.                              | FORTIER . . . . .                   | T | Mécanique expérimentale des fluides.              |
| CHAZY . . . . .                        | T | Mécanique analytique et mécanique céleste.        | DANJON . . . . .                    | T | Astronomie.                                       |
| CROZE . . . . .                        | T | Physique théorique et physique céleste.           | FROMAGEOT . . . . .                 | T | Chimie biologique.                                |
| DUPONT . . . . .                       | T | Théories chimiques.                               | LAPORTE . . . . .                   | T | Physique générale et radio-activité.              |
| VALIRON . . . . .                      | T | Calcul différentiel et calcul intégral.           | JANET . . . . .                     |   | Mathématiques générales.                          |
| BARRABÉ . . . . .                      | T | Géologie structurale et géologie appliquée.       | PETIT . . . . .                     | T | Biologie maritime.                                |
| VAYON . . . . .                        | T | Analyse et mesures chimiques.                     | QUENEY . . . . .                    | T | Météorologie et dynamique atmosphérique.          |
| G. DARMOIS . . . . .                   | T | Calcul des probabilités et physique mathématique. | GALLIEN . . . . .                   |   | Biologie animale (P.C.B.).                        |
| Jacques BOURCART . . . . .             | T | Géographie physique et géologie dynamique.        | EICHHORN . . . . .                  |   | Biologie végétale (P.C.B.).                       |
| AUBEL . . . . .                        | T | Chimie biologique.                                | DE CUGNAC . . . . .                 |   | Biologie végétale (P.C.B.).                       |
| M <sup>me</sup> JOLIOT-CURIE . . . . . | T | Physique générale et radio-activité.              | LAVAL . . . . .                     |   | Physique (P.C.B.).                                |
| PLANTEFOL . . . . .                    | T | Botanique.                                        | M <sup>lle</sup> CAUCHOIS . . . . . |   | Chimie-physique.                                  |
| CABANNES . . . . .                     | T | Recherches physiques.                             | THELLIER . . . . .                  |   | Physique du globe.                                |
| GRASSÉ . . . . .                       | T | Évolution des êtres organisés.                    | AUDUBERT . . . . .                  |   | Électrochimie.                                    |
| PRÉVOST . . . . .                      | T | Chimie organique.                                 | L'HÉRITIER . . . . .                |   | Génétique.                                        |
| BOULIGAND . . . . .                    | T | Application de l'analyse à la géométrie.          | GRIVET . . . . .                    | T | Radio-électricité.                                |
| CHAUDRON . . . . .                     | T | Chimie appliquée.                                 | PONCIN . . . . .                    |   | Mécanique des fluides.                            |
| WYART . . . . .                        | T | Minéralogie.                                      | THIRY . . . . .                     | T | Mécanique appliquée.                              |
| TEISSIER . . . . .                     | T | Zoologie.                                         | DUBREIL . . . . .                   |   | Mathématiques générales.                          |
| MANGENOT . . . . .                     | T | Biologie végétale.                                | QUELET . . . . .                    |   | Chimie (P.C.B.).                                  |
| P. AUGER . . . . .                     | T | Physique quantique et relativité.                 | CAGNIARD . . . . .                  |   | Géophysique appliquée.                            |
| MONNIER . . . . .                      |   | Physiologie générale.                             | CHAMPETIER . . . . .                |   | Chimie appliquée.                                 |
| PIVETEAU . . . . .                     | T | Géologie.                                         | CUVILLIER . . . . .                 |   | Géologie structurale et géologie appliquée.       |
|                                        |   |                                                   | JUNG . . . . .                      |   | Pétrographie.                                     |
|                                        |   |                                                   | TRILLAT . . . . .                   |   | Physique (P.C.B.).                                |
|                                        |   |                                                   | WIEMANN . . . . .                   |   | Chimie (P.C.B.).                                  |
|                                        |   |                                                   | LICHNÉROWICZ . . . . .              |   | Mathématiques.                                    |
|                                        |   |                                                   | JACQUINOT . . . . .                 |   | Physique (P.C.B.).                                |
|                                        |   |                                                   | VASSY . . . . .                     |   | Physique de l'atmosphère.                         |
|                                        |   |                                                   | DESTOUCHES . . . . .                |   | Théories physiques.                               |

Secrétaire . . . . . Ch. MONIER



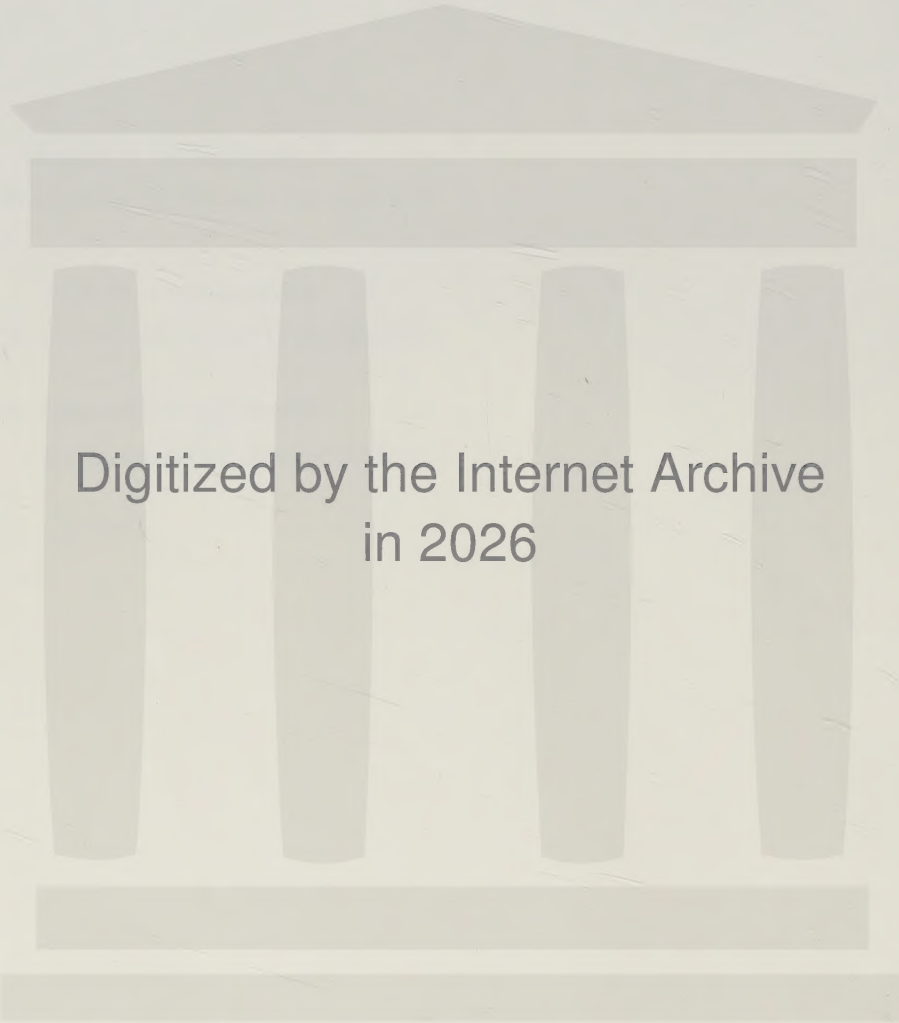
A Monsieur A. FORTIER

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

A Monsieur A. FOCH

Professeur à la Faculté des Sciences de Paris

*Hommage d'affectueux respect  
et de profonde reconnaissance.*



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41547113\\_0012](https://archive.org/details/IA41547113_0012)

# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                                          | PAGES     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| INTRODUCTION .. .. .                                                                     | 1         |
| PREMIÈRE PARTIE                                                                          |           |
| <b>Turbulence et instabilité du mouvement laminaire .. .. .</b>                          | <b>3</b>  |
| MOUVEMENT LAMINAIRE. — MOUVEMENT TURBULENT .. .. .                                       | 3         |
| DÉFINITION DE LA TURBULENCE .. .. .                                                      | 3         |
| Passage du régime laminaire au régime turbulent. — Transition .. .. .                    | 5         |
| Instabilité du mouvement laminaire .. .. .                                               | 5         |
| DEUXIÈME PARTIE                                                                          |           |
| <b>Écoulement dans les conduites cylindriques circulaires .. .. .</b>                    | <b>7</b>  |
| RAPPEL DES TRAVAUX ANTÉRIEURS SUR L'ÉCOULEMENT DANS LES TUBES CYLINDRIQUES..             | 7         |
| JUSTIFICATION DE L'ÉTUDE ENTREPRISE .. .. .                                              | 8         |
| DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL .. .. .                                                          | 9         |
| a) Généralités .. .. .                                                                   | 9         |
| b) Etude théorique du pavillon d'entrée.. .. .                                           | 10        |
| Calcul de l'épaisseur de la couche limite d'une tuyère convergente de révolution .. .. . | 10        |
| Exemples numériques .. .. .                                                              | 16        |
| Remarque .. .. .                                                                         | 17        |
| c) Fabrication du pavillon. — Les tubes de verre .. .. .                                 | 23        |
| d) Le réservoir et ses accessoires .. .. .                                               | 24        |
| e) Déterminatiin du régime d'écoulement .. .. .                                          | 25        |
| INTRODUCTION DE LA TURBULENCE DANS L'ÉCOULEMENT LAMINAIRE .. .. .                        | 26        |
| Obtention du régime laminaire aux grands nombres de Reynolds.. .. .                      | 26        |
| <b>A) PERTURBATIONS D'ORIGINE EXTÉRIEURE OU MÉCANIQUE .. .. .</b>                        | <b>28</b> |
| a) Chocs .. .. .                                                                         | 28        |
| b) Agitation de l'eau .. .. .                                                            | 28        |
| c) Entrée ou sortie de liquide par un trou percé dans la conduite .. .. .                | 29        |
| Réalisation des trous dans les parois de verre. — Dispositif expérimental ..             | 29        |
| Résultats des expériences .. .. .                                                        | 33        |
| a) Effet d'une rentrée d'eau par le trou .. .. .                                         | 33        |
| β) Effet produit par une fuite d'eau par le trou.. .. .                                  | 35        |
| <b>B) PERTURBATIONS D'ORIGINE GÉOMÉTRIQUE OU SYSTÉMATIQUE .. .. .</b>                    | <b>36</b> |
| COURBURE DES TUBES .. .. .                                                               | 36        |
| a) Etude théorique .. .. .                                                               | 36        |
| b) Etude expérimentale .. .. .                                                           | 38        |
| c) Réalisation de l'encastrement .. .. .                                                 | 39        |
| d) Résultats expérimentaux .. .. .                                                       | 39        |
| Conséquence importante de la courbure des tubes .. .. .                                  | 43        |

|                                                                           |    |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| ÉCOULEMENT LAMINAIRE DANS UN TUBE LÉGÈREMENT CONIQUE .. .. .              | 44 |
| a) Etude théorique .. .. .                                                | 44 |
| b) Conclusion pratique .. .. .                                            | 51 |
| PHÉNOMÈNES D'AUTO-ENTRETIEN .. .. .                                       | 51 |
| a) Perturbations d'ordre systématique .. .. .                             | 51 |
| b) Etude expérimentale .. .. .                                            | 51 |
| c) Conséquence pratique importante .. .. .                                | 55 |
| ETUDE PARTICULIÈRE DES VARIATIONS DE PRESSION LORS DE L'AUTO-ENTRETIEN. — |    |
| MANOMÈTRE A BULLE D'AIR .. .. .                                           | 56 |
| Manomètre à bulle d'air (physalimanomètre) .. .. .                        | 56 |
| Dispositif particulier de mesure .. .. .                                  | 58 |
| Conclusions .. .. .                                                       | 61 |

### TROISIÈME PARTIE

|                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------|-----|
| Écoulement dans les conduites bidimensionnelles .. .. .                   | 63  |
| GÉNÉRALITÉS .. .. .                                                       | 63  |
| RAPPEL DES TRAVAUX ANTÉRIEURS .. .. .                                     | 63  |
| ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL PLAN .. .. .                                    | 66  |
| Réalisation d'un canal bidimensionnel plan .. .. .                        | 66  |
| Résultats expérimentaux .. .. .                                           | 68  |
| a) Aspect de la nappe liquide à la sortie de la conduite .. .. .          | 68  |
| b) Entrée à bords vifs .. .. .                                            | 70  |
| c) Entrée à bords arrondis .. .. .                                        | 72  |
| Comparaison de ces résultats avec les travaux antérieurs .. .. .          | 73  |
| Conclusions .. .. .                                                       | 75  |
| ÉCOULEMENT DANS UN TUBE CYLINDRIQUE ANNULAIRE .. .. .                     | 75  |
| Répartition des vitesses .. .. .                                          | 75  |
| Réalisation d'une conduite cylindrique annulaire .. .. .                  | 78  |
| Résultats expérimentaux .. .. .                                           | 79  |
| Aspect de l'écoulement à la sortie de la conduite .. .. .                 | 79  |
| Comparaison de ces résultats avec les travaux antérieurs. — Conclusions.. | 81  |
| ÉCOULEMENT DANS UN DIFFUSEUR ANNULAIRE DE RÉVOLUTION .. .. .              | 82  |
| Réalisation du diffuseur .. .. .                                          | 82  |
| Résultats expérimentaux .. .. .                                           | 84  |
| Noyau intérieur cylindrique .. .. .                                       | 84  |
| Noyau intérieur cylindro-tronconique .. .. .                              | 84  |
| Remarques .. .. .                                                         | 87  |
| Conclusions .. .. .                                                       | 87  |
| ETUDE THÉORIQUE .. .. .                                                   | 88  |
| Equations de l'hydrodynamique dans un système de révolution .. .. .       | 88  |
| Simplification des équations (conduite à deux dimensions) .. .. .         | 89  |
| Application à la conduite divergente étudiée .. .. .                      | 92  |
| Discussion de la solution .. .. .                                         | 93  |
| Condition d'existence du mouvement laminaire .. .. .                      | 95  |
| Evolution du profil des vitesses pour $e$ et $w_1$ donnés .. .. .         | 97  |
| Etude du cas particulier $K = 0$ .. .. .                                  | 100 |
| INTERPRÉTATION THÉORIQUE DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX .. .. .              | 103 |
| Remarque .. .. .                                                          | 104 |
| CONCLUSIONS GÉNÉRALES .. .. .                                             | 104 |

ANNEXE I

|                                                               |     |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| Rentrée d'eau par un trou percé dans la paroi du tube .. .. . | 107 |
| RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES .. .. .                             | 107 |

ANNEXE II

|                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| Écoulement dans un tuyau légèrement courbé (Dean, réf. [19]) .. .. . | 111 |
|----------------------------------------------------------------------|-----|

ANNEXE III

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Étude mathématique du manomètre à bulle d'air comprimée (physalimanomètre) . | 113 |
| Etude de la courbe de réponse .. .. .                                        | 119 |
| Fréquence propre d'oscillation non amortie .. .. .                           | 120 |
| Etude des paraboles $m = Cte$ .. .. .                                        | 120 |
| Renseignements bibliographiques .. .. .                                      | 123 |

---



## INTRODUCTION

---

La turbulence, ce mouvement confus et désordonné qui affecte le plus souvent l'écoulement des fluides naturels, a fait l'objet d'un nombre considérable de recherches. Mais la genèse de cette turbulence est un sujet d'importance aussi bien théorique qu'expérimental dont maints physiciens et mathématiciens ont essayé de percer le mystère.

Comme la turbulence naît toujours à partir du régime laminaire, le premier problème qui se pose est celui de la stabilité de l'écoulement laminaire.

La théorie de Tollmien-Schlichting, fondée sur l'amplification d'oscillations infiniment petites, a pu être confirmée dans certaines expériences réalisées récemment en Amérique. Mais cette théorie suppose nécessairement la présence de perturbations étrangères.

Les expériences que nous avons réalisées, avec des tubes cylindriques de verre lisse, nous ont montré sans ambiguïté que la turbulence ainsi produite, si elle naît bien avec ces perturbations, disparaît aussi avec elles.

Pour un tube donné, dans des conditions expérimentales données, en un point suffisamment éloigné de l'entrée, nous avons les résultats suivants :

1° Tant que le nombre de Reynolds reste inférieur à une certaine valeur  $R_1$  (de l'ordre de 2000 pour un tube de section circulaire) le régime reste toujours laminaire quel que soit l'état d'agitation du fluide au départ. Ce nombre, appelé parfois nombre de Reynolds critique inférieur, est celui qui intervient pour caractériser la stabilité du régime laminaire. En particulier, c'est celui que l'on calcule dans la théorie de Tollmien-Schlichting;

2° Aux grandes valeurs du nombre de Reynolds, il existe une limite au delà de laquelle le régime ne peut plus être laminaire et devient turbulent. Soit  $R_2$  cette valeur.

Le phénomène se produit quelles que soient les précautions prises pour éviter les perturbations extérieures ou les causes d'auto-entretien des perturbations.  $R_2$  dépend étroitement de la forme et des particularités géométriques de la conduite. C'est la limite supérieure pour laquelle les équations de Navier-Stokes ont une solution unique ou une solution physiquement possible. Quand la forme géométrique change,  $R_2$  change.

Nous avons pu obtenir ainsi le régime laminaire pour des valeurs du nombre de Reynolds jamais encore atteintes.

Cette influence de la forme géométrique peut s'expliquer dans le cadre d'une nouvelle hypothèse que nous avons développée théoriquement et vérifiée expérimentalement avec une conduite du type bi-dimensionnel.

Nous avons effectué ces travaux, de 1947 à 1950, au Laboratoire de Mécanique des Fluides de l'Université de Paris, en tant qu'attaché de recherches au Centre National de la Recherche Scientifique. Ils n'ont été menés à bien que grâce aux avis et à l'appui de notre Maître M. FORTIER, Directeur du Laboratoire de Mécanique des Fluides, qui nous avait signalé toute l'importance de la question et a bien voulu accepter la direction de nos travaux. Nous ne saurions en quelques lignes lui exprimer assez toute notre gratitude pour l'inlassable complaisance avec laquelle il nous a guidé et a encouragé nos efforts.

Nous tenons également à remercier M. FOCH, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, dont la vaste érudition nous a souvent été d'un secours incomparable. Pour réaliser nos expériences il a bien voulu mettre à notre disposition les ressources de son laboratoire.

Nous ne voulons pas non plus oublier LÉON AGOSTINI, emporté par une maladie brutale, et dont les entretiens amicaux nous étaient des plus profitables, ni M. RATEAU, Ingénieur du Laboratoire de Mécanique Physique, ainsi que tout son personnel, M. SÉRRÉ en particulier; ils nous ont apporté à l'exécution des réalisations pratiques, souvent très délicates, une habileté et un dévouement qui nous furent très sensibles.

---

## PREMIÈRE PARTIE

---

# TURBULENCE ET INSTABILITÉ DU MOUVEMENT LAMINAIRE

---

### MOUVEMENT LAMINAIRE. — MOUVEMENT TURBULENT

L'écoulement d'un fluide réel présente deux aspects extrêmes bien différents qui, pour les mouvements permanents, sont les suivants :

— dans le premier aspect la vitesse en un point reste parallèle à une direction fixe et varie d'une manière continue d'un point à l'autre : c'est l'écoulement *laminaire*. Les trajectoires des particules fluides restent parallèles entre elles au voisinage d'un point et le mouvement du fluide s'effectue par couches successives qui glissent les unes sur les autres;

— dans le deuxième aspect, et dans le cas de la plupart des écoulements à l'échelle industrielle, les particules fluides présentent une agitation désordonnée qui se superpose à un mouvement d'ensemble du fluide. La direction de la vitesse en un point subit des fluctuations incessantes au cours du temps. On dit alors que l'écoulement est *turbulent*.

L'écoulement laminaire s'accompagne toujours d'une certaine dissipation d'énergie, mais qui reste faible, car il n'y a pas d'échange de quantité de mouvement entre les couches voisines du fluide, en dehors des échanges moléculaires. Dans l'écoulement véritablement turbulent, avec fluctuations de directions de la vitesse, l'énergie du mouvement moyen se transmet à de gros tourbillons qui se scindent eux-mêmes en tourbillons plus petits pour finalement disparaître par viscosité tandis que d'autres tourbillons se reforment sur les parois et entretiennent la turbulence de l'écoulement.

### DÉFINITION DE LA TURBULENCE

Si l'on recherche une définition précise de la turbulence, il ne semble pas y en avoir de générale. Celles qu'on trouve dépendent toujours d'un certain point de vue auquel s'est placé son auteur. Dans ses *Leçons sur la viscosité des liquides et des gaz* (1907), BRILLOUIN indique que le mémoire de HAGEN, paru en 1854, est le premier où soit faite nettement la distinction entre les deux régimes et où le phénomène soit correctement décrit. Mais c'est BOUSSINESQ qui a introduit la notion de turbulence en hydro-

dynamique : pour lui le mouvement est turbulent lorsque la vitesse en un point varie beaucoup autour d'une vitesse moyenne locale constante (du moins pour les mouvements permanents en moyenne).

Osborne REYNOLDS n'emploie pas les mots « laminaire » ou « turbulence ». Il appelle le mouvement laminaire « direct motion » et le mouvement turbulent « sinuous motion ». Pour lui, les deux genres de mouvements se différencient par le fait que, dans l'un, le fluide se déplace plus ou moins en ligne droite (dans un tube rectiligne) tandis que, dans l'autre, le fluide suit une trajectoire contournée. Il donne pour ce dernier une comparaison avec des troupes en mouvement sur le terrain de manœuvre, ce qui montre bien que, d'après lui, le caractère de la turbulence est lié à l'irrégularité du mouvement.

OSEEN a trouvé un mouvement plan satisfaisant exactement aux équations de Navier-Stokes, où les trajectoires sont très contournées; c'est donc qu'il doit y avoir dans le mouvement turbulent quelque chose d'autre que la « sinuosité » de Reynolds.

On peut essayer cependant de trouver une définition de la turbulence dans la théorie des mouvements turbulents donnée par Reynolds. D'après lui, le mouvement réel, c'est-à-dire observé à l'échelle microscopique, est inaccessible à nos observations et nos mesures. Celles-ci portent sur un mouvement moyen, c'est-à-dire macroscopique, ne satisfaisant pas aux équations différentielles de l'hydrodynamique, du fait que de l'énergie passe d'une façon permanente du mouvement macroscopique au mouvement microscopique et que, par suite, la dépense d'énergie est plus grande que celle que donneraient les équations de Navier-Stokes pour le mouvement microscopique. Cependant, si l'on revient au mouvement laminaire plan contourné, indiqué par OSEEN, cette définition conduirait à l'appeler turbulent. On a dit alors que ce qui différenciait la solution de Oseen du mouvement turbulent c'était le caractère non stationnaire de la solution. Mais on peut trouver pourtant des solutions exactes des équations de Navier-Stokes dépendant du temps et contenant des fonctions arbitraires, ce qui permet de donner à la solution un caractère aussi irrégulier que l'on veut dans le temps; dans l'esprit du physicien ce mouvement n'est pas pour autant turbulent.

OSEEN a été ainsi amené à la définition suivante :

— « un fluide est en mouvement turbulent lorsque la complication de ce mouvement est telle que l'on renonce à sa connaissance précise et que l'on se contente de la connaissance du mouvement moyen. »

Cette définition ne sépare d'ailleurs pas nettement les mouvements turbulents des mouvements non turbulents. Ainsi l'hydrodynamique, cherchant à pénétrer les lois du mouvement microscopique, appellera laminaire un mouvement qui, pour l'hydraulique qui ne s'intéresse qu'au mouvement moyen, lui paraîtra turbulent.

La définition de la turbulence dépend donc de l'échelle à laquelle on se place.

L'ingénieur qui étudie les rafales considère la moyenne sur quelques minutes comme mouvement moyen et les fluctuations pendant des périodes de quelques secondes comme la turbulence. En soufflerie, on considère la moyenne sur quelques minutes comme mouvement moyen et les fluctuations qui se produisent plusieurs fois par seconde comme la turbulence superposée.

On constate ainsi, à mesure que diminue l'échelle des fluctuations, un accroissement de leur fréquence et une diminution de leur intensité.

La définition de la turbulence est donc nécessairement arbitraire, la définition la plus utile dépend du but de l'étude.

Les auteurs sont cependant tous d'accord pour reconnaître qu'à la turbulence correspondent des fluctuations de vitesse en direction. Ces fluctuations en direction s'accompagnent en général de fluctuations en grandeur et les appareils de mesure ne savent pas les distinguer. C'est pourtant les *fluctuations en direction* <sup>(1)</sup> qui caractérisent essentiellement l'écoulement turbulent. Ainsi l'écoulement dans une conduite peut, dans certaines conditions, présenter des fluctuations de vitesse en grandeur seulement et des fluctuations correspondantes de la pression  $p$ , telles que  $p + \frac{1}{2} \rho V^2 = \text{Cte}$  dans toute la section. L'écoulement a tous les caractères de l'écoulement laminaire, bien qu'il y ait des fluctuations incohérentes de la pression et de la vitesse autour de leur valeur moyenne. Il s'agit là d'un écoulement laminaire non permanent mais permanent en moyenne. La distinction avec un écoulement turbulent dans la même conduite sera très difficile à établir. Un appareil de mesure de  $p$  ou de  $V$  ne saura distinguer ni séparer ces fluctuations de débit laminaire des fluctuations se produisant dans un autre écoulement vraiment turbulent.

### **Passage du régime laminaire au régime turbulent. Transition.**

Les considérations précédentes s'appliquent surtout à la définition de la turbulence établie. Il existe cependant de nombreux cas pratiques où la recherche d'une telle définition semble superflue. C'est par exemple le cas de l'écoulement dans une conduite en charge. L'expérience permet de différencier très nettement deux régimes d'écoulement, quand il n'est plus laminaire, on dit qu'il est turbulent. C'est aussi le cas des couches limites. La couche limite d'un corps plongé dans un fluide en mouvement est laminaire dans la partie avant. Elle change de nature plus ou moins brusquement quand on s'en éloigne. La zone de passage est dite zone de transition. Là encore les caractéristiques des deux types d'écoulement sont nettement différents et il n'y a aucune contradiction à appeler turbulent le deuxième.

### **Instabilité du mouvement laminaire.**

STOKES, le premier, a formulé l'hypothèse que le passage d'un mouvement régulier à un mouvement turbulent était dû à l'instabilité du mouvement régulier. Mais il n'est pas sûr que cette instabilité entraîne forcément la turbulence.

Le travail de Taylor, relatif à la stabilité d'un fluide visqueux, enfermé entre deux cylindres, montre qu'après dépassement de la limite de stabilité le mouvement reste régulier et, dans certaines circonstances, stationnaire — mais il n'en est pas toujours ainsi. En général, le calcul, quand il montre que le mouvement devient instable, n'indique pas le genre de mouvement qui lui fait suite mais il est logique de penser que c'est le mouvement turbulent. Il en est ainsi dans la théorie de la stabilité de la couche limite laminaire fondée sur l'amplification des petites oscillations. Cette théorie fut

---

(1) Cette idée a été développée avec précision pour la première fois par M. A. FORTIER (référence 35).

surtout développée par les Allemands dès le début de ce siècle, et notamment par TOLLMIEU et SCHLICHTING. Elle fut toujours très critiquée jusqu'à sa vérification expérimentale par les Américains, en 1943.

Il existe cependant une différence de caractère entre le problème de Taylor et l'écoulement dans les couches limites ou dans les tuyaux. Dans le problème de Taylor le fluide est complètement enfermé et sur les parois la vitesse est imposée. On peut montrer dans ce cas que les équations de Navier-Stokes ont une solution pour des vitesses assez faibles; qu'aux grandes vitesses il y ait plusieurs solutions stationnaires, il n'y a rien d'étonnant, du point de vue mathématique. Au contraire, dans l'écoulement dans la couche limite ou dans les tuyaux, le fluide n'est pas partout limité par des parois. Dans le cas d'un tuyau par exemple, pour déterminer le mouvement il faut connaître la répartition des vitesses dans la section d'entrée et dans la section de sortie : ce sont deux fonctions inconnues dont il est difficile de prévoir l'influence sur la vitesse en un point intérieur. On peut toutefois penser, ce que l'expérience vérifie, que pour les faibles débits, et loin des extrémités, la vitesse ne dépend pas de la répartition des vitesses, donc de l'état tourbillonnaire à l'entrée. Mais aux grands débits cette influence se fait sentir à tel point qu'il n'est pas possible d'obtenir le régime laminaire aux grands nombres de Reynolds si l'on perturbe l'entrée de la canalisation.

Ces théories de l'instabilité du mouvement laminaire fournissent des résultats très intéressants sur la naissance de la turbulence. Elles ont le grave défaut de supposer essentiellement l'existence de perturbations infiniment petites il est vrai, mais néanmoins étrangères à l'écoulement principal. Quand on supprime toutes perturbations, ces théories ne semblent plus devoir s'appliquer, cependant l'expérience montre que la turbulence finit toujours par s'établir. On peut en trouver une explication en considérant la forme de la répartition des vitesses fournie par les équations de Navier-Stokes. Si une telle répartition peut, dans certaines conditions, ne plus pouvoir correspondre à un écoulement laminaire physiquement possible, il est logique de penser que la turbulence s'établira, même en l'absence de toute perturbation. C'est ce que nous montrerons en étudiant l'écoulement dans une conduite bidimensionnelle. Auparavant, nous allons préciser l'influence perturbatrice de diverses causes susceptibles de produire la turbulence dans un tube cylindrique circulaire.

---

## DEUXIÈME PARTIE

---

# ÉCOULEMENT DANS LES CONDUITES CYLINDRIQUES CIRCULAIRES

---

### RAPPEL DES TRAVAUX ANTÉRIEURS SUR L'ÉCOULEMENT DANS LES TUBES CYLINDRIQUES

Dans son mémoire, publié en 1846, POISEUILLE énonçait la loi fondamentale de l'écoulement visqueux d'un liquide incompressible dans un tube de section circulaire. Il s'agissait de tubes capillaires, de diamètre égal à une fraction de millimètre, parcourus par de l'eau distillée dans lesquels les filets liquides conservant leur individualité tout le long du tube ne se mélangeaient pas. Ce type d'écoulement, appelé laminaire ou « à la Poiseuille », correspond à une solution très simple des équations de Navier-Stokes.

Ignorant les travaux de POISEUILLE, HAGEN publia, vers la même époque, un Mémoire sur le même sujet. Mais HAGEN opérait avec des tubes de plusieurs millimètres de diamètre, et à différentes températures, ce qui lui permit de distinguer nettement l'existence de deux régimes d'écoulement permanent, le régime laminaire déjà étudié par POISEUILLE et le régime turbulent ou hydraulique. Dans ce dernier écoulement, les filets liquides ne restent plus parallèles au tube, la perte de charge est bien plus grande qu'en régime laminaire. Au passage d'un régime à l'autre, l'écoulement présente un caractère irrégulier, par soubresauts violents. HAGEN donna une théorie sur ce changement de régime permanent. Il fallut attendre O. REYNOLDS [1] <sup>(1)</sup> (1883) pour trouver de nouvelles études expérimentales sur la même question. REYNOLDS montra l'inexactitude de la loi de Hagen.

REYNOLDS utilisait des tubes de diamètre de l'ordre du centimètre. Dans une première série d'expériences, ces tubes étaient alimentés par une cuve où l'eau pouvait se reposer longtemps et il observait la nature du régime à l'aide de filets colorés convenablement introduits au sein du liquide. Dans une autre série d'expériences, le tube était directement relié à la canalisation d'eau urbaine. REYNOLDS fut amené, par des consi-

---

(1) Les chiffres entre crochets renvoient aux références bibliographiques.

dérations théoriques, à introduire la fameuse quantité sans dimension  $\mathcal{R} = \frac{VD}{\nu}$  <sup>(1)</sup> qui porte son nom et qui fournit un critérium pour marquer le passage d'un régime à un autre.

Depuis lors, de nombreux physiciens, BARNES [2], COKER [3], EKMAN [4], SCHILLER [5] ont essayé de mieux définir ce passage d'un régime à l'autre en introduisant les notions de nombre de Reynolds critique inférieur et de nombre critique supérieur. Des mesures furent faites sur des liquides autres que l'eau et sur des gaz.

En prenant beaucoup de soins pour réaliser ses expériences, EKMAN a pu observer en effet le régime laminaire jusqu'à des valeurs du nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$  de l'ordre de 50 000. Dans tous les cas, la turbulence disparaît pour des valeurs de  $\mathcal{R}$  inférieures à un nombre voisin de 2 000. On peut se faire une image de la stabilité du régime laminaire pour  $\mathcal{R} > 2000$ , en la comparant à celle que présente une boule placée sur une

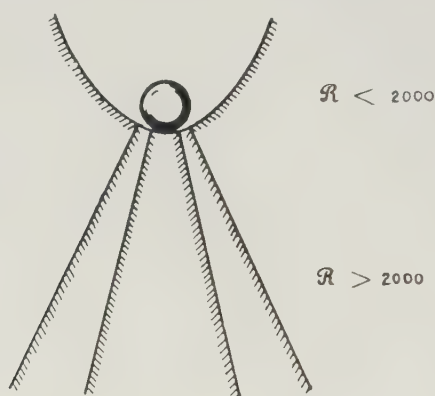


Fig. 1

pointe présentant un léger creux en son sommet [6] (*fig. 1*). En effet, la stabilité du régime laminaire semble devenir de plus en plus précaire à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Mais cette façon de voir a l'inconvénient de supposer que l'établissement du mouvement turbulent, à partir du régime laminaire, requiert toujours une perturbation de grandeur finie, si petite soit-elle.

La littérature précise mal les conditions expérimentales dans lesquelles apparaît la turbulence. On relève même certaines contradictions comme par exemple la persistance ou non de la turbulence après un choc sur le tube.

## JUSTIFICATION DE L'ÉTUDE ENTREPRISE

La recherche expérimentale de ces causes de turbulence présente donc un grand intérêt. Mais pour l'entreprendre il était nécessaire de réaliser un dispositif d'expériences susceptible d'isoler ces causes une à une pour en faciliter l'étude. Si, par exemple, dans un tube on arrive à obtenir le régime laminaire pour un nombre de Reynolds élevé,

---

(1)  $V$  est la vitesse moyenne de l'eau de viscosité cinématique  $\nu$ ,  $D$  est le diamètre du tube.

il sera facile de préciser les raisons pour lesquelles ce régime disparaît aux plus faibles valeurs.

Plusieurs causes perturbatrices étaient déjà connues, nous en avons déterminé de nouvelles que seul un dispositif très simple, comme celui que nous utilisons, permettait de découvrir facilement. Nous serons amenés à distinguer ainsi deux sortes de perturbations :

a) Les perturbations d'origine extérieure : choc, agitation de l'eau d'origine thermique ou mécanique, entrée ou sortie de l'eau par un trou percé dans le tuyau, etc.;

b) Les perturbations d'origine géométrique ou d'ordre systématique : forme géométrique de la canalisation (courbure, conicité du tube, etc.), méthodes et appareils de mesures utilisés sur le tuyau, etc.

La turbulence produite par les premières présente un caractère épisodique et ne persiste que pendant la durée de la perturbation. Les secondes au contraire entraînent une turbulence qui se maintient dans le tube et se déclanche toujours pour la même valeur critique  $R_c$  [7].

## DISPOSITIF EXPÉRIMENTAL

### a) Généralités.

Pour des raisons de commodités pratiques, nous avons pris l'eau comme fluide circulant dans un tube qui débouche à l'air libre.

L'observation du jet à la sortie permet de déterminer facilement la nature du régime d'écoulement. Cette façon d'opérer dispense d'introduire sur la conduite un appareil de mesure qui, nous le verrons plus tard, risquerait de provoquer prématurément la turbulence.

Nous avons également supprimé tout robinet ou vanne sur le parcours du liquide; les pertes de charge irrégulières qui se produisent à leur niveau pourraient introduire des fluctuations de débit.

Le réglage du débit s'effectue alors par la mise sous pression, variable à volonté, de l'eau contenue dans un réservoir étanche.

La présence d'un pavillon à l'entrée du tube est indispensable pour retarder au maximum la production de la turbulence <sup>(1)</sup>.

Dans leurs expériences REYNOLDS [1] ou EKMAN [4] avaient muni leur tube d'un pavillon en bois, solidement fixé au tube et raccordé convenablement au moyen de cire — ce mode de fixation leur a d'ailleurs donné quelques ennuis. D'autre part, ni eux, ni les autres expérimentateurs ne donnent d'indications sur la forme à donner au pavillon pour obtenir les meilleurs résultats.

Si elle existe toutefois pour toutes les valeurs de  $R$ , il serait intéressant de connaître théoriquement cette forme optimum — mais le problème n'est pas encore résolu. Cependant un calcul préliminaire nous a permis d'obtenir quelques indications précieuses qui, en fait, correspondaient bien aux constatations faites expérimentalement.

---

(1) Si l'entrée du pavillon était à bord net, la turbulence se produirait toujours pour une valeur du nombre de Reynolds de 2 000.

b) Étude théorique du pavillon d'entrée.

Dans un tube cylindrique, en écoulement laminaire, on admet que la couche limite se développe progressivement depuis l'entrée, tout en restant laminaire. A la distance  $x_0$  de l'entrée, la répartition parabolique des vitesses est atteinte et la couche limite a envahi tout le tube, son épaisseur est alors  $\frac{D}{2}$  le rayon du tube (fig. 2).

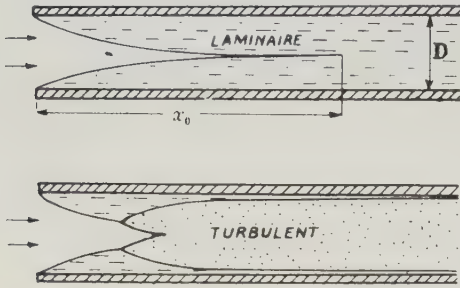


Fig. 2

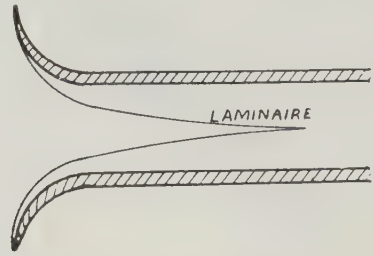


Fig. 3. — Couche limite dans un pavillon

Pour éviter la turbulence, il faut en particulier que le développement de cette couche limite se fasse très lentement dans le pavillon d'entrée (fig. 3).

Nous sommes ainsi amenés à calculer l'épaisseur de la couche limite laminaire dans une tuyère convergente de révolution.

CALCUL DE L'ÉPAISSEUR DE LA COUCHE LIMITE D'UNE TUYÈRE CONVERGENTE DE RÉVOLUTION.

L'épaisseur  $\delta$  de la couche limite d'un corps de révolution d'axe  $TT'$  est donnée par l'équation différentielle suivante, établie par C. B. MILLIKAN [8] :

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \int_0^\delta u^2 dy - U \frac{d}{dx} \int_0^\delta u dy + \frac{r'}{r} \left[ \int_0^\delta u^2 dy - U \int_0^\delta u dy \right] = UU' \delta - \frac{\tau_0}{\rho};$$

en désignant par  $x$  l'abscisse curviligne  $OM$  d'un point  $M$  de la méridienne  $\mathcal{M}$  comptée à partir d'une origine quelconque  $O$ ,  $r$  le rayon  $MH$ ,  $u$  la vitesse à la distance  $y = MP$  de la paroi,  $U$  la vitesse à la distance  $\delta$ ,  $\rho$  la masse spécifique du fluide,  $\tau_0$  la force de frottement par unité de surface de la paroi (fig. 4).

En outre, on suppose que  $\delta$  est petit à la fois devant  $r$  et devant le rayon de courbure  $r_0$  de la méridienne en  $M$  :

$$\delta \ll r \quad \text{et} \quad \delta \ll r_0$$

et que la vitesse  $U$  est égale à celle qui aurait en  $M$  un écoulement à potentiel des vitesses d'un fluide parfait.

Admettons dans la couche limite une distribution quelconque des vitesses de la forme :

$$(2) \quad \frac{u}{U} = f\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

avec :

$$f(0) = 0;$$

posons :

$$\frac{u}{U} = w \quad \text{et} \quad \frac{y}{\delta} = z$$

avec :

$$\int_0^1 w dz = \alpha \quad \text{et} \quad \int_0^1 w^2 dz = \beta$$

$w$  et  $z$  sont compris entre 0 et 1 (fig. 6).

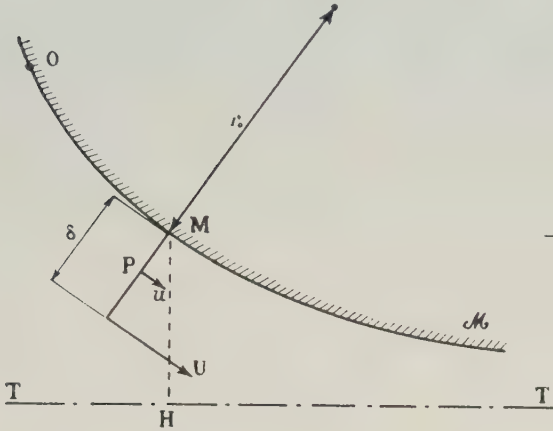


Fig. 4. — Écoulement dans une tuyère convergente

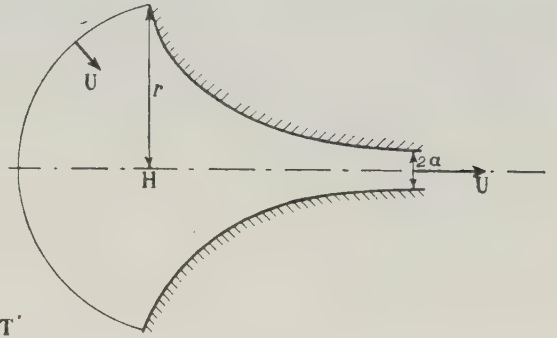


Fig. 5

Supposons en outre pour  $\frac{\tau_0}{\rho}$  une fonction de la forme :

$$(3) \quad \frac{\tau_0}{\rho} = h_n \left( \frac{v}{U \delta} \right)^n U^2,$$

$h_n$  étant une constante numérique,  $n$  étant positif.

L'équation (1) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ U^2 \delta \int_0^1 w^2 dz \right] - U \frac{d}{dx} \left[ U \delta \int_0^1 w dz \right] + \frac{r'}{r} U \delta \left[ \int_0^1 w^2 dz - \int_0^1 w dz \right] \\ = UU' \delta - h_n \left( \frac{v}{U \delta} \right)^n U^2, \end{aligned}$$

soit :

$$(4) \quad UU' \delta (2\beta - \alpha - 1) + \left( U \delta' + \frac{r'}{r} U^2 \right) (\beta - \alpha) = -h_n \left( \frac{v}{U \delta} \right)^n U^2.$$

Multiplions les deux membres de l'équation précédente par l'expression suivante :

$$\frac{(n+1) U^{(n+1)} \left( 1 + \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} \right)^{-2} \delta^n r^{n+1}}{\beta - \alpha},$$

on obtient :

$$(n+1) \left(1 + \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right) U' U^{(n+1)} \delta^{n+1} r^{n+1} + U^{(n+1)} \left(1 + \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right) \\ \left[ (n+1) \delta' \delta^n r^{n+1} + (n+1) r' r^n \delta^{n+1} \right] = \frac{n+1}{\alpha-\beta} h_n \delta^n r^{n+1} U^{(n+1)} \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} + 1;$$

équation qu'on peut intégrer facilement de 0 à  $x$ , puisque le premier membre est une dérivée exacte :

$$(5) \quad \left[ U^{(n+1)} \left(1 + \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right) \delta^{n+1} r^{n+1} \right]_0^x = \frac{(n+1) h_n \delta^n}{\alpha-\beta} \int_0^{\delta} r^{n+1} U^{(n+1)} \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} + 1 dx.$$

Cette équation nous permet de calculer l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite en  $x$ , connaissant sa valeur en 0 ( $x = 0$ ).

Or, quelle que soit la répartition (2), le seul fait que  $0 \leq w \leq 1$  donc que  $0 \leq w^2 \leq w \leq 1$  entraîne :

$$(6) \quad \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} > 2.$$

En effet :

$$(7) \quad \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{1-\alpha + \alpha-\beta}{\alpha-\beta} = 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha-\beta}.$$

Comme on a toujours :

$$(w-1) \geq 0,$$

soit :

$$w^2 - 2w + 1 \geq 0,$$

donc :

$$w^2 - w \geq w - 1$$

ou :

$$w - w^2 \leq 1 - w$$

le signe égal n'est qu'exceptionnel, en intégrant de 0 à 1 il vient :

$$\int_0^1 w dz - \int_0^1 w^2 dz < \int_0^1 dz - \int_0^1 w dz,$$

soit :

$$\alpha - \beta < 1 - \beta;$$

on a sûrement  $\alpha - \beta > 0$ , puisque  $w^2 \leq w$  (le signe égal n'étant qu'exceptionnel), donc en divisant par  $\alpha - \beta$  :

$$\frac{1-\alpha}{\alpha-\beta} > 1,$$

ce qui, en vertu de (7), entraîne l'inégalité (6).

S'il se présente un léger décollement dans la couche limite (fig. 7),  $w$  peut prendre des valeurs négatives ( $w \leq 0$ ), l'inégalité (6) est encore vérifiée mais à la condition encore que  $\alpha - \beta > 0$ .

Appelons  $Q$  le débit total permanent du fluide dans le convergent,  $U_0$  la vitesse, moyenne dans le plan de la gorge de rayon  $a$  (fig. 5).

Lorsque  $r$  est suffisamment grand, c'est-à-dire loin en amont de la gorge, l'écoulement est sensiblement identique à celui qui se produit autour d'un puits sphérique de centre  $H$  et la vitesse  $U$  est sensiblement inversement proportionnelle à  $r^2$ .

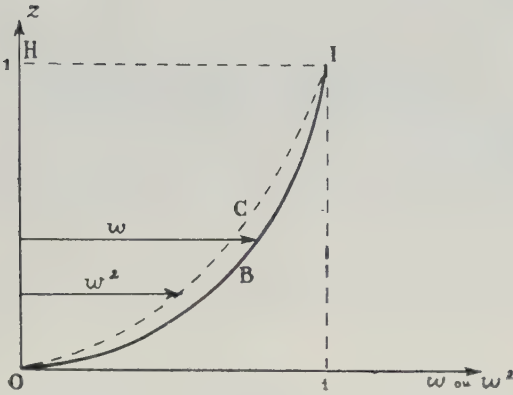


Fig. 6. — Couche limite sans décollement

$w = f(z)$  courbe OBI  
 $w^2 = \varphi(z)$  courbe OCI  
 $\alpha = \text{aire OBIHO}$   
 $\beta = \text{aire OCIHO}$

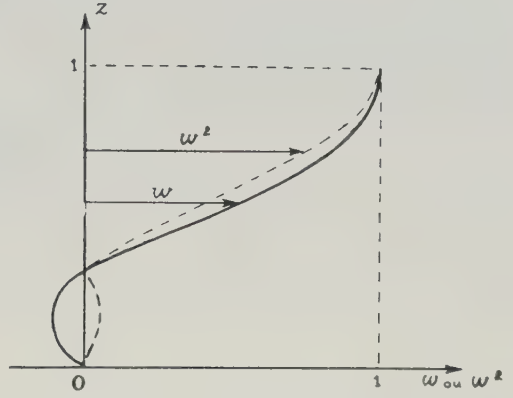


Fig. 7. — Couche limite avec décollement

Introduisons dans les calculs les quantités sans dimensions suivantes :

$$\frac{U}{U_0}, \quad \frac{\delta}{a}, \quad \frac{x}{a}, \quad \frac{r}{a},$$

on a :

$$\frac{U}{U_0} = \frac{1}{K \left( \frac{r}{a} \right)^2} \quad \text{avec :} \quad K > 1 \quad (1).$$

L'équation (3) devient :

$$(8) \quad \left[ \left( \frac{U}{U_0} \right)^{(n+1) \cdot 1 + \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}} \left( \frac{\delta}{a} \right)^{n+1} \left( \frac{r}{a} \right)^{n+1} \right]_0^{\frac{x}{a}} \\ = \frac{n+1}{\alpha-\beta} h_n \frac{1}{\left( \frac{U_0 a}{v} \right)^n} \int_0^{\frac{x}{a}} \left( \frac{r}{a} \right)^{n+1} \left( \frac{U}{U_0} \right)^{(n+1) \cdot \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} + 1} d \left( \frac{x}{a} \right);$$

(1) En effet nous avons :  $r^2 U < a^2 U_0$ .

$$\frac{U}{U_0} < \frac{a^2}{r^2} = \frac{1}{\left( \frac{r}{a} \right)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{U}{U_0} = \frac{1}{K \left( \frac{r}{a} \right)^2} \quad \text{avec} \quad K > 1.$$

posons :

$$Y = \left(\frac{U}{U_0}\right)^{(n+1) \left(1 + \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right)} \left(\frac{\delta}{a}\right)^{n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1}$$

et :

$$Z = \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \left(\frac{U}{U_0}\right)^{(n+1) \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} + 1};$$

l'équation (8) devient :

$$[Y]_0^{\frac{x}{a}} = \frac{n+1}{\alpha-\beta} h_n \frac{1}{\left(\frac{U_0 a}{\nu}\right)^n} \int_0^{\frac{x}{a}} Z d\left(\frac{x}{a}\right),$$

ou :

$$(8') \quad Y\left(\frac{x}{a}\right) - Y(0) = \frac{n+1}{\alpha-\beta} h_n \frac{1}{\left(\frac{U_0 a}{\nu}\right)^n} \int_0^{\frac{x}{a}} Z d\left(\frac{x}{a}\right).$$

Prenons l'origine O, loin en amont de la gorge, dans une région où l'écoulement est sensiblement identique à celui qui existe autour d'un puits sphérique, cela suppose par ailleurs que  $\frac{r}{a} \gg 1$ .

En vertu de (6), nous avons les inégalités suivantes :

$$(9) \quad \begin{cases} Y_0 = \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \left(\frac{\delta_0}{a}\right)^{n+1} \left(\frac{U}{U_0}\right)^{(n+1) \left(1 + \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right)} < \left(\frac{\delta_0}{a}\right)^{n+1} \frac{1}{K^{3(n+1)}} \frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)^{5(n+1)}}, \\ Z_0 = \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \left(\frac{U}{U_0}\right)^{(n+1) \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} + 1} < \frac{1}{K^{2n+3}} \frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)^{3n+5}}, \end{cases}$$

$\delta_0$  étant l'épaisseur de la couche limite à l'origine O. Par ailleurs, à la gorge ou en son voisinage immédiat où l'épaisseur de la couche limite est  $\delta_g$ ,  $\frac{U}{U_0}$  et  $\frac{r}{a}$  sont de l'ordre de 1; nous avons :

$$(10) \quad \begin{cases} Y_g = \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \left(\frac{\delta_g}{a}\right)^{n+1} \left(\frac{U}{U_0}\right)^{(n+1) \left(1 + \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right)} \neq \left(\frac{\delta_g}{a}\right)^{n+1}, \\ Z_g = \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \left(\frac{U}{U_0}\right)^{(n+1) \left(\frac{1-\beta}{\alpha-\beta}\right) + 1} \neq 1, \end{cases}$$

à la gorge même le signe  $\neq$  étant remplacé par le signe  $=$ .

Si on veut calculer  $\delta_g$ , la comparaison des résultats donnés par les équations (9) et (10) montre qu'on peut toujours négliger  $Y_0$  devant  $Y_g$ . En effet  $K > 1$ ,  $\frac{r}{a} \gg 1$

et  $\frac{\delta_0}{a}$  peut être pris aussi petit que l'on veut par un choix convenable de l'origine. Par suite on peut écrire sensiblement :

$$Y_g = \frac{n+1}{\alpha - \beta} h_n \frac{1}{\left(\frac{U_0 a}{v}\right)^n} \int_0^x Z d\left(\frac{x}{a}\right).$$

D'autre part, pour faire le calcul de l'intégrale précédente, la comparaison des relations (9) et (10) montre que la contribution dans les calculs des zones éloignées en amont est négligeable devant celles qui avoisinent la gorge.

En conséquence, pour calculer l'épaisseur  $\delta_g$  de la couche limite à la gorge ou en son voisinage immédiat, on pourra écrire :

$$(11) \quad \left(\frac{U}{U_0}\right)^{(n+1) \cdot 1 + \frac{1-\beta}{\alpha-\beta}} \left(\frac{\delta_g}{a}\right)^{n+1} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \\ = \frac{n+1}{\alpha - \beta} h_n \frac{1}{\left(\frac{U_0 a}{v}\right)^n} \int_0^x \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \left(\frac{U}{U_0}\right)^{(n+1) \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} + 1} d\left(\frac{x}{a}\right)$$

et à la gorge même on a  $\frac{U}{U_0} = 1$ ,  $\frac{r}{a} = 1$ ,  $x = x_0$  :

$$(11') \quad \left(\frac{\delta_g}{a}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{\alpha - \beta} h_n \frac{1}{\left(\frac{U_0 a}{v}\right)^n} \int_0^{x_0} \left(\frac{r}{a}\right)^{n+1} \left(\frac{U}{U_0}\right)^{(n+1) \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} + 1} d\left(\frac{x}{a}\right).$$

Il suffira pour justifier ce résultat de prendre une origine définie par les conditions indiquées précédemment, c'est-à-dire qui soit située dans une région où l'écoulement se rapproche de celui qui existe autour d'un puits sphérique. Cette origine, pourra d'ailleurs ne pas être éloignée de la gorge, si la tuyère converge rapidement. Mais, de toute façon, le calcul nous montre que seules ont une influence notable sur l'épaisseur de la couche limite dans la gorge (et dans la partie cylindrique qui la prolonge) les parois du convergent voisines de la gorge en comparaison de celles qui en sont éloignées.

Ces résultats s'étendent également au cas où la distribution des vitesses dans la couche limite varie d'une manière continue avec  $n$  (en effet nous n'avons fait d'autre hypothèse sur la répartition des vitesses que  $\alpha - \beta > 0$ ) et même lorsqu'il se présente un faible décollement de la couche limite à l'amont. De plus, les calculs sont valables pour une couche limite aussi bien laminaire que turbulente (seule la répartition des vitesses change).

On peut donc dire, en d'autres termes, que l'épaisseur de la couche limite dans la gorge est *pratiquement déterminée uniquement par la forme du convergent au voisinage amont immédiat de celle-ci*. C'est cette portion du pavillon qu'il importe par conséquent

de bien définir et de bien tracer, pour diminuer le plus possible le développement de la couche limite laminaire et retarder l'apparition de la turbulence dans celle-ci. Cette région doit donc être rapidement convergente, il faut éviter de donner au pavillon une forme d'allure conique lentement resserrée. Il s'agit là d'un fait bien connu des techniciens qui tracent les profils de tuyère, mais ce n'était qu'un résultat empirique que le calcul que nous venons d'effectuer permet de démontrer théoriquement [9].

### Exemples numériques.

1° Pour une couche limite laminaire on a :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \nu \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0} = \nu \frac{U}{\delta} f'_0 \left( \frac{y}{\delta} \right) = h_n \nu \frac{U}{\delta};$$

en posant :

$$h_n = f'_0 \left( \frac{y}{\delta} \right),$$

nous avons ici :

$$n = 1.$$

Prenons pour profil de la couche limite laminaire l'expression du deuxième degré, comme l'a fait MILLIKAN :

$$\frac{u}{U} = f \left( \frac{y}{\delta} \right) = 2 \frac{y}{\delta} - \left( \frac{y}{\delta} \right)^2,$$

on en tire :

$$\begin{aligned} h_n &= 2, \\ \alpha &= \frac{10}{15}, \quad \beta = \frac{8}{15}; \end{aligned}$$

l'équation (8) devient :

$$\left[ \left( \frac{U}{U_0} \right)^9 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{\delta}{a} \right)^2 \right]_0^{\frac{x}{a}} = \frac{30}{\frac{U_0}{\nu} a} \int_0^{\frac{x}{a}} \left( \frac{U}{U_0} \right)^8 \left( \frac{r}{a} \right)^2 d \left( \frac{x}{a} \right).$$

Ces calculs ont été appliqués à une tuyère de révolution dont le schéma ci-joint donne les lignes de courant, les équipotentielle et les isovitesses, déterminées d'après la méthode de Prasil. On en a déduit la répartition des vitesses le long de la paroi ce qui a permis de faire le calcul de l'intégrale du second membre de l'équation précédente (voir tableaux de chiffres).

On constate sur les courbes combien la fonction donnant  $\left( \frac{U}{U_0} \right)^8 \left( \frac{r}{a} \right)^2$  décroît rapidement dès qu'on s'éloigne de la gorge de la tuyère.

Le calcul donne par ailleurs :

$$Y_0 < \left( \frac{\delta_0}{a} \right)^2 \frac{1}{K^6} \frac{1}{\left( \frac{r}{a} \right)^{10}}, \quad Z_0 < \frac{1}{K^5} \frac{1}{\left( \frac{r}{a} \right)^8};$$

2° Pour la couche limite turbulente admettons que :

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\frac{1}{7}},$$

et :

$$\frac{\tau_0}{\rho} = 0,0225 U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta}\right)^{\frac{1}{4}} \text{ (relation donnée par Karman);}$$

nous tirons :  $n = \frac{1}{4}$ ;

$$\alpha = \frac{7}{8}, \quad \beta = \frac{7}{9}, \quad \frac{1-\beta}{\alpha-\beta} = \frac{16}{7}$$

et l'équation devient :

$$\left[ \left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{115}{28}} \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{\delta}{a}\right)^{\frac{5}{4}} \right]_0^x = \frac{0,289}{\left(\frac{U_0 a}{\nu}\right)^{\frac{5}{4}}} \int_0^x \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{108}{28}} d\left(\frac{x}{a}\right).$$

On en déduit les mêmes conclusions que pour l'écoulement laminaire, le calcul donne ici :

$$Y_0 < \left(\frac{\delta}{a}\right)^{\frac{5}{4}} \frac{1}{K^{\frac{15}{4}}} \frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{25}{4}}},$$

$$Z_0 < \frac{1}{K^{\frac{14}{4}}} \frac{1}{\left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{23}{4}}}.$$

REMARQUE.

Il faut noter que l'application des formules (11) ou (11') nécessite pour calculer  $\delta_0$  la connaissance de la répartition des vitesses  $U$  le long des parois du convergent. Nous rappelons que les vitesses  $U$  seraient celles d'un fluide pour un écoulement à potentiel des vitesses dans ce convergent.

On peut la déterminer de n'importe quelle façon, par la méthode de Prasil, par exemple. Nous avons appliqué ces calculs à une tuyère aérodynamique.

Les tableaux de chiffres et les figures 8, 9, 9 bis qui suivent en donnent les résultats. La répartition des vitesses le long du profil de la tuyère a été déduite de la construction de Prasil.

Calcul de la couche limite laminaire.

La gorge correspond à  $a = 7$  cm et  $x = 22$  cm. Pour  $x = 0$  :  $U = 1$ .

| $x$                                                                                                                | 0                      | 1                     | 2                     | 3                     | 4                     | 5                      | 6                     | 7                     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|-----------------------|
| $r$                                                                                                                | 23                     | 22                    | 21                    | 20                    | 19                    | 18                     | 17                    | 16,05                 |
| $U$                                                                                                                | 1,28                   | 1,56                  | 1,86                  | 2,12                  | 2,5                   | 2,92                   | 3,38                  | 3,86                  |
| $r^2$                                                                                                              | 529                    | 484                   | 441                   | 400                   | 361                   | 324                    | 289                   | 257                   |
| $\left(\frac{r}{a}\right)^2$                                                                                       | 10,08                  | 9,87                  | 9                     | 8,16                  | 7,37                  | 6,61                   | 5,9                   | 5,24                  |
| $\frac{x}{a}$                                                                                                      | 0                      | 0,143                 | 0,286                 | 0,428                 | 0,571                 | 0,714                  | 0,857                 | 1                     |
| $\frac{r}{a}$                                                                                                      | 3,28                   | 3,14                  | 3                     | 2,86                  | 2,71                  | 2,57                   | 2,43                  | 2,29                  |
| $\frac{U}{U_0}$                                                                                                    | 5,1.10 <sup>-2</sup>   | 5,57.10 <sup>-2</sup> | 6,65.10 <sup>-2</sup> | 7,57.10 <sup>-2</sup> | 8,93.10 <sup>-2</sup> | 1,04.10 <sup>-1</sup>  | 1,20.10 <sup>-1</sup> | 1,38.10 <sup>-1</sup> |
| $U^8$                                                                                                              | 7                      | 34,8                  | 143                   | 401                   | 1 520                 | 5 270                  | 16 900                | 49 300                |
| $\left(\frac{U}{U_0}\right)^8$                                                                                     | 1,85.10 <sup>-11</sup> | 9,2.10 <sup>-11</sup> | 3,8.10 <sup>-10</sup> | 1,06.10 <sup>-9</sup> | 4.10 <sup>-9</sup>    | 1,4.10 <sup>-8</sup>   | 4,48.10 <sup>-8</sup> | 1,31.10 <sup>-7</sup> |
| $z = \left(\frac{U}{U_0}\right)^8 \left(\frac{r}{a}\right)^2$                                                      | 1,86.10 <sup>-10</sup> | 9,1.10 <sup>-10</sup> | 3,42.10 <sup>-9</sup> | 8,17.10 <sup>-9</sup> | 3.10 <sup>-8</sup>    | 9,2.10 <sup>-8</sup>   | 2,6.10 <sup>-7</sup>  | 6,85.10 <sup>-7</sup> |
| $I = \int_0^x z d\left(\frac{x}{a}\right)$                                                                         | 0                      | 0                     | 1,5.10 <sup>-10</sup> | 7.10 <sup>-10</sup>   | 3,75.10 <sup>-9</sup> | 11,85.10 <sup>-9</sup> | 3,45.10 <sup>-8</sup> | 9,37.10 <sup>-8</sup> |
| $\left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{9}{2}}$                                                                         | 2,13.10 <sup>-6</sup>  | 2,26.10 <sup>-6</sup> | 4,75.10 <sup>-6</sup> | 8,9.10 <sup>-6</sup>  | 1,85.10 <sup>-5</sup> | 5,75.10 <sup>-5</sup>  | 7,25.10 <sup>-5</sup> | 1,34.10 <sup>-4</sup> |
| $\frac{r}{a} \times \frac{1}{\left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{9}{2}}}$                                            |                        |                       | 6,3.10 <sup>5</sup>   | 3,2.10 <sup>5</sup>   | 1,5.10 <sup>5</sup>   | 6,8.10 <sup>4</sup>    | 3,3.10 <sup>4</sup>   | 1,4.10 <sup>4</sup>   |
| $\sqrt{I}$                                                                                                         |                        |                       | 1,2.10 <sup>-5</sup>  | 2,6.10 <sup>-5</sup>  | 6.10 <sup>-5</sup>    | 1,1.10 <sup>-4</sup>   | 1,8.10 <sup>-4</sup>  | 3.10 <sup>-4</sup>    |
| $\sqrt[3]{30} \frac{r}{a} \frac{\sqrt{I}}{\left(\frac{U}{U_0}\right)^{\frac{9}{2}}} = \frac{8}{a} \frac{U^0 a}{v}$ |                        |                       | 41                    | 46                    | 49                    | 41                     | 32                    | 23                    |

**Calcul de la couche limite laminaire (suite).**

La gorge correspond à  $a = 7$  cm et  $x = 22$  cm. Pour  $x = 0 : U = 1$ .

| $x$                                                                                                                     | 8                    | 9                    | 10                   | 11                   | 12                   | 13                   | 14                   | 15                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| $r$                                                                                                                     | 15,1                 | 14,15                | 13,2                 | 12,25                | 11,4                 | 10,6                 | 9,9                  | 9,25                 |
| $U$                                                                                                                     | 4,5                  | 5,45                 | 6,6                  | 8                    | 9,8                  | 11,6                 | 13,5                 | 15,8                 |
| $r^2$                                                                                                                   | 228                  | 200                  | 174                  | 150                  | 130                  | 112,2                | 98                   | 85,6                 |
| $\left(\frac{r}{a}\right)^2$                                                                                            | 4,65                 | 4,08                 | 3,55                 | 3,06                 | 2,65                 | 2,29                 | 2                    | 1,75                 |
| $\frac{x}{a}$                                                                                                           | 1,14                 | 1,285                | 1,43                 | 1,57                 | 1,715                | 1,86                 | 2                    | 2,14                 |
| $\frac{r}{a}$                                                                                                           | 2,16                 | 2,02                 | 1,88                 | 1,75                 | 1,63                 | 1,51                 | 1,41                 | 1,32                 |
| $\frac{U}{U_0}$                                                                                                         | $1,60 \cdot 10^{-1}$ | $1,95 \cdot 10^{-1}$ | $2,36 \cdot 10^{-1}$ | $2,86 \cdot 10^{-1}$ | $3,5 \cdot 10^{-1}$  | $4,14 \cdot 10^{-1}$ | $4,82 \cdot 10^{-1}$ | $5,64 \cdot 10^{-1}$ |
| $U^8$                                                                                                                   | $167,3 \cdot 10^3$   | $778 \cdot 10^3$     | $3,56 \cdot 10^6$    | $16,8 \cdot 10^6$    | $84,6 \cdot 10^6$    | $324 \cdot 10^6$     | $109,5 \cdot 10^7$   | $390,6 \cdot 10^7$   |
| $\left(\frac{U}{U_0}\right)^8$                                                                                          | $4,43 \cdot 10^{-7}$ | $2,06 \cdot 10^{-6}$ | $9,45 \cdot 10^{-6}$ | $4,45 \cdot 10^{-5}$ | $2,24 \cdot 10^{-4}$ | $8,6 \cdot 10^{-4}$  | $2,9 \cdot 10^{-3}$  | $2,06 \cdot 10^{-2}$ |
| $z = \left(\frac{U}{U_0}\right)^8 \left(\frac{r}{a}\right)^2$                                                           | $2 \cdot 10^{-6}$    | $8,4 \cdot 10^{-6}$  | $3,3 \cdot 10^{-5}$  | $1,36 \cdot 10^{-4}$ | $5,9 \cdot 10^{-4}$  | $2 \cdot 10^{-3}$    | $5,8 \cdot 10^{-3}$  | $1,77 \cdot 10^{-2}$ |
| $I = \int_0^x a_z d\left(\frac{x}{a}\right)$                                                                            | $2,4 \cdot 10^{-7}$  | $9 \cdot 10^{-7}$    | $2,4 \cdot 10^{-6}$  | $13 \cdot 10^{-6}$   | $5,42 \cdot 10^{-5}$ | $2,2 \cdot 10^{-4}$  | $7 \cdot 10^{-4}$    | $24 \cdot 10^{-4}$   |
| $\left(\frac{U}{U_0}\right)^2$                                                                                          | $2,6 \cdot 10^{-4}$  | $6,35 \cdot 10^{-4}$ | $1,5 \cdot 10^{-3}$  | $3,6 \cdot 10^{-3}$  | $8,85 \cdot 10^{-3}$ | $1,88 \cdot 10^{-2}$ | $3,6 \cdot 10^{-2}$  | $7,5 \cdot 10^{-2}$  |
| $\frac{r}{a} \times \frac{1}{\left(\frac{U}{U_0}\right)^2}$                                                             | $8,3 \cdot 10^3$     | $3,2 \cdot 10^3$     | $1,2 \cdot 10^3$     | 500                  | 185                  | 80                   | 39                   | 17,6                 |
| $\sqrt{I}$                                                                                                              | $5 \cdot 10^{-4}$    | $9,5 \cdot 10^{-4}$  | $1,55 \cdot 10^{-3}$ | $3,6 \cdot 10^{-3}$  | $7,4 \cdot 10^{-3}$  | $1,5 \cdot 10^{-2}$  | $2,65 \cdot 10^{-2}$ | $4,9 \cdot 10^{-2}$  |
| $\sqrt[3]{30} \frac{r}{a} \sqrt{I} \frac{9}{\left(\frac{U}{U_0}\right)^2} = \frac{\delta}{a} \frac{U_0}{v} \frac{a}{v}$ | 23                   | 16,5                 | 10,2                 | 9                    | 7,5                  | 6,6                  | 5,65                 | 4,72                 |

**Calcul de la couche limite laminaire (suite).**

La gorge correspond à  $a = 7$  cm et  $x = 22$  cm. Pour  $x = 0 : U = 1$ .

| $x$                                                                                                         | 16                    | 17                    | 18                    | 19                    | 20                  | 21                  | 22                  | 23                  | 24                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| $r$                                                                                                         | 8,65                  | 8,15                  | 7,75                  | 7,4                   | 7,2                 | 7,05                | 7                   | 7                   | 7                   |
| $U$                                                                                                         | 18                    | 20,3                  | 23                    | 27                    | 28,5                | 30                  | 29                  | 28                  | 28                  |
| $r^2$                                                                                                       | 74,8                  | 66,4                  | 60                    | 54,8                  | 51,8                | 49,7                | 49                  | 49                  | 49                  |
| $\left(\frac{r}{a}\right)^2$                                                                                | 1,537                 | 1,355                 | 1,224                 | 1,118                 | 1,058               | 1,014               | 1                   | 1                   | 1                   |
| $\frac{x}{a}$                                                                                               | 2,285                 | 2,43                  | 2,57                  | 2,715                 | 2,86                | 3                   | 3,14                | 3,275               | 3,43                |
| $\frac{r}{a}$                                                                                               | 1,235                 | 1,165                 | 1,108                 | 1,058                 | 1,03                | 1,01                | 1                   | 1                   | 1                   |
| $\frac{U}{U_0}$                                                                                             | 6,43.10 <sup>-1</sup> | 7,25.10 <sup>-1</sup> | 8,21.10 <sup>-1</sup> | 9,65.10 <sup>-1</sup> | 1,018               | 1,071               | 1,035               | 1                   | 1                   |
| $U^8$                                                                                                       | 11.10 <sup>9</sup>    | 28,8.10 <sup>9</sup>  | 78,1.10 <sup>9</sup>  | 282,5.10 <sup>9</sup> | 435.10 <sup>9</sup> | 656.10 <sup>9</sup> | 500.10 <sup>9</sup> | 377.10 <sup>9</sup> | 377.10 <sup>9</sup> |
| $\left(\frac{U}{U_0}\right)^8$                                                                              | 2,92.10 <sup>-2</sup> | 7,65.10 <sup>-2</sup> | 2,82.10 <sup>-1</sup> | 7,5.10 <sup>-1</sup>  | 1,153               | 1,74                | 1,328               | 1                   | 1                   |
| $z = \left(\frac{U}{U_0}\right)^8 \left(\frac{r}{a}\right)^2$                                               | 4,5.10 <sup>-2</sup>  | 1,04.10 <sup>-1</sup> | 3,45.10 <sup>-1</sup> | 8,85.10 <sup>-1</sup> | 1,22                | 1,76                | 1,32                | 1                   | 1                   |
| $I = \int_0^x z d\left(\frac{x}{a}\right)$                                                                  | 0,006                 | 0,017                 | 0,045                 | 0,14                  | 0,335               | 0,544               | 0,764               | 0,960               | 1,15                |
| $\left(\frac{U}{U_0}\right)^2$                                                                              | 0,136                 | 0,234                 | 0,408                 | 0,845                 | 1,07                | 1,35                | 1,15                | 1                   | 1                   |
| $\frac{r}{a} \times \frac{1}{\left(\frac{U}{U_0}\right)^2}$                                                 | 9,1                   | 5                     | 2,7                   | 1,25                  | 0,96                | 0,75                | 0,87                | 1                   | 1                   |
| $\sqrt{I}$                                                                                                  | 0,077                 | 0,13                  | 0,21                  | 0,37                  | 0,57                | 0,74                | 0,87                | 0,97                | 1,07                |
| $\sqrt[3]{30} \frac{r}{a} \frac{\sqrt{I}}{\left(\frac{U}{U_0}\right)^2} = \frac{\delta}{a} \frac{U_0 a}{v}$ | 3,84                  | 3,56                  | 3,1                   | 2,53                  | 3                   | 3,05                | 4,17                | 5,32                | 5,86                |

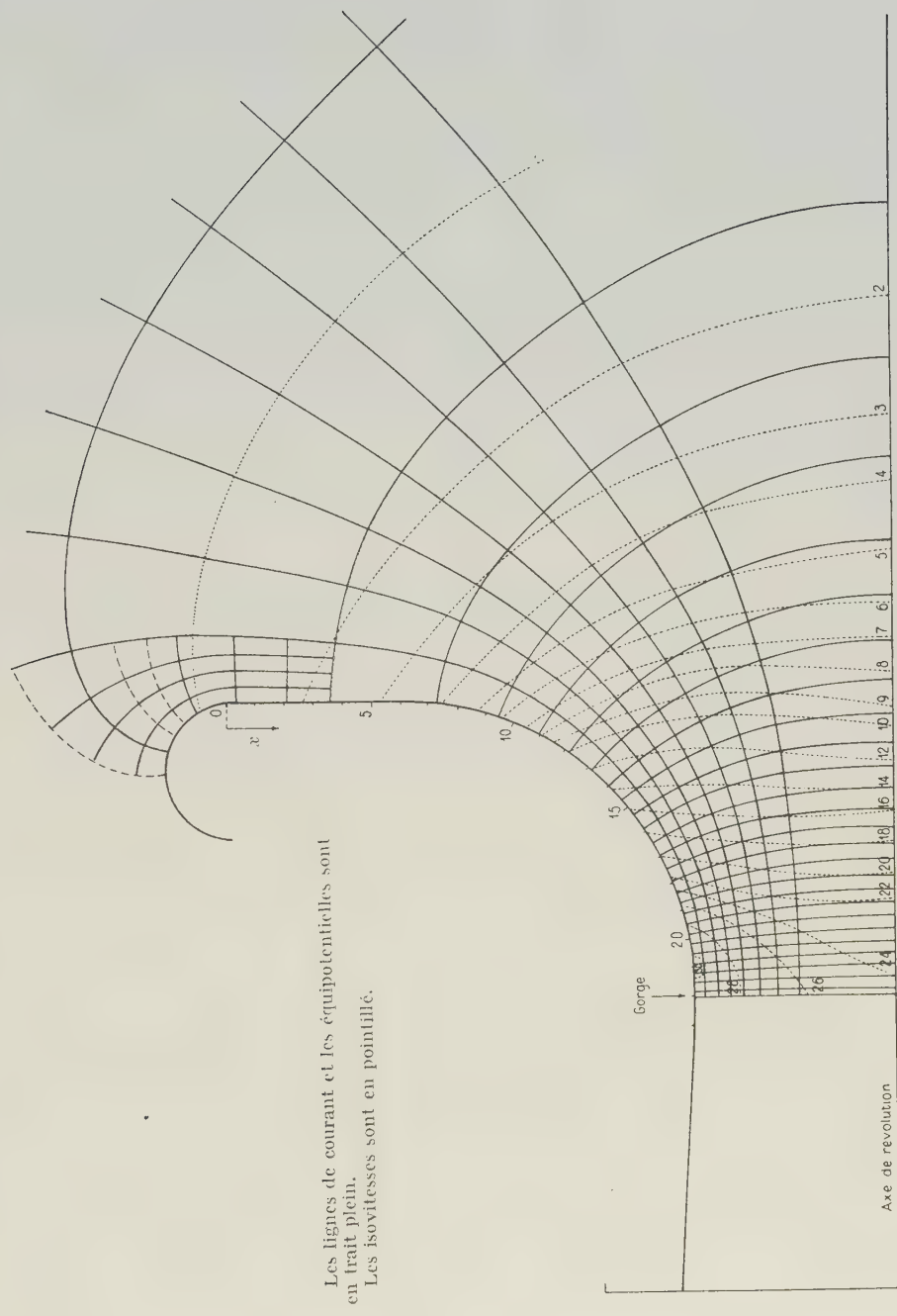


Fig. 8

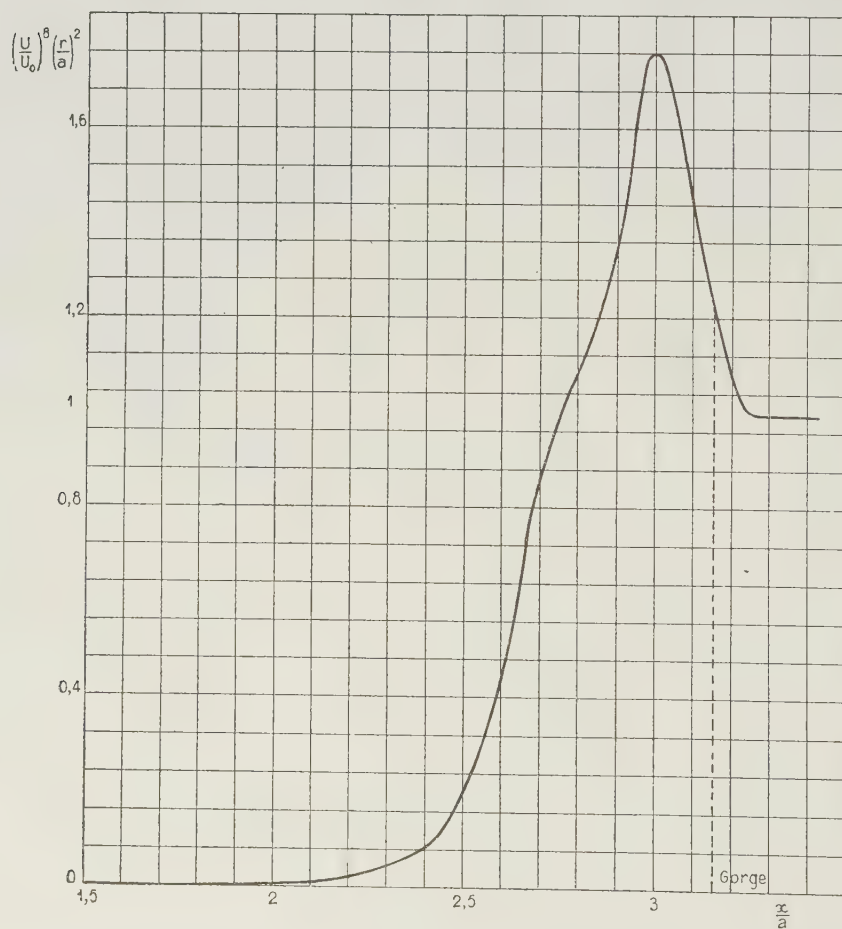
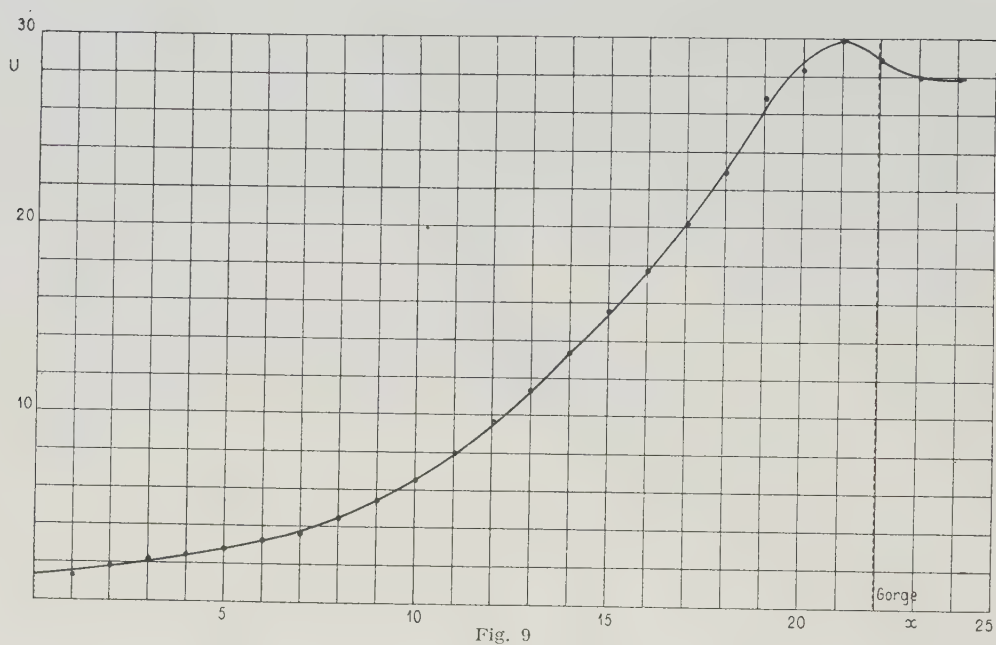


Fig. 9 bis

### Fabrication du pavillon. Les tubes de verre.

Les calculs précédents ne peuvent fournir le profil exact du pavillon, mais ils nous donnent des renseignements qualitatifs très intéressants sur la forme générale optimum.

Par ailleurs, le verre semble tout indiqué pour obtenir un écoulement en tube lisse afin d'atteindre les grandes valeurs de  $R$ . Nous avons donc utilisé des tubes de verre du commerce (tubes de sûreté des chimistes) fournis en général en cannes de 1 m de long. Il est nécessaire de faire un choix pour éliminer les tubes présentant un défaut de fabrication. Il faut des tubes se rapprochant le plus possible du cylindre de section circulaire. En général les tubes sont légèrement coniques, courbes et de section faiblement elliptique. Un choix strict permet toutefois d'en trouver quelques-uns présentant des défauts négligeables, pourvu que leur longueur ne soit pas trop grande.

Les tubes ayant quelques millimètres de diamètre, il n'est pas question d'y adjoindre un pavillon en bois ou en métal fabriqué séparément ; la réalisation du raccord serait trop difficile. La solution la plus séduisante consiste à faire le pavillon lui-même

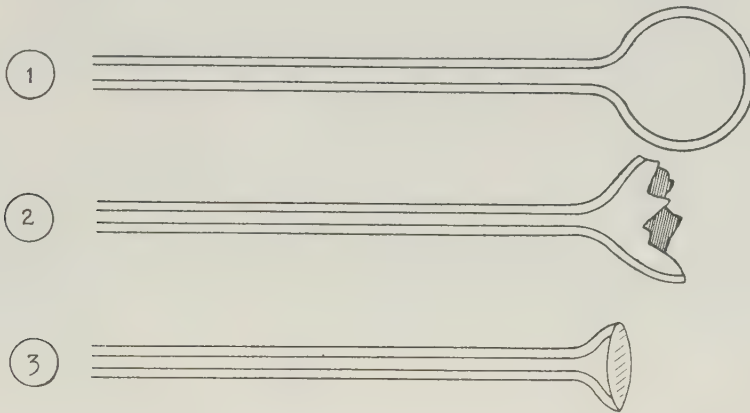


Fig. 10. — Fabrication du pavillon par soufflage d'une bulle de verre

en verre. Ce résultat est obtenu en soufflant une bulle de verre à l'extrémité du tube. On crève ensuite cette bulle de manière à laisser une collerette évasée qu'on meule jusqu'à obtenir une forme bien symétrique de révolution.

Il est inutile de border le pavillon à la flamme, cela produirait un léger renflement sur tout le pourtour qui ne pourrait être que gênant (*fig. 10*).

Pour mener à bien ces opérations de soufflage, il semble avantageux d'utiliser des tubes de verre assez épais, ce qui permet d'amasser facilement beaucoup de verre pour former la bulle et obtenir ainsi un pavillon à paroi épaisse et peu fragile. Plusieurs essais sont parfois nécessaires pour obtenir un pavillon de forme convenable, en apparence, mais c'est l'expérience seule qui montre s'il en est ainsi. Des résultats intéressants furent obtenus soit en soufflant la bulle en une seule fois (et non en plusieurs fois, ce qui aurait permis d'amasser davantage de verre), soit en écrasant légèrement la bulle avant solidification complète. Il faut signaler au passage les avantages des

pavillons ainsi fabriqués. Ils sont parfaitement raccordés au tube et, si une forme ne convient pas, on peut immédiatement au chalumeau en fabriquer une autre. Le gros inconvénient évidemment c'est que cette forme n'est pas parfaitement contrôlable et ne peut être modifiée par retouches.

Cette méthode nous a cependant donné d'excellents résultats et l'on finit toujours par fabriquer un pavillon satisfaisant; c'est une affaire d'habileté.

Nous avons utilisé des tubes de 1 à 6 mm de diamètre intérieur, la longueur variait entre 100 et 500 diamètres. Ces diamètres sont mesurés au microscope, du moins les plus petits.

### **Le réservoir et ses accessoires (Planche I, *fig. A*).**

L'eau s'écoule dans le tube à partir d'un réservoir. Nous avons utilisé l'eau de la ville et le réservoir cylindrique en tôle galvanisée soudée aux dimensions suivantes :

|               |        |
|---------------|--------|
| Hauteur.....  | 0,80 m |
| Diamètre..... | 0,44 m |

soit une capacité de 125 l environ. C'est un réservoir de fabrication commerciale pouvant supporter la pression maxima de 6 kg/cm<sup>2</sup>.

L'eau est mise sous pression afin d'obtenir des écoulements rapides. L'air comprimé, fourni par une bouteille munie d'un détendeur, est introduit à la partie supérieure du réservoir par une ouverture munie d'une chicane destinée à briser le jet gazeux. Un manomètre M, du type Bourdon, d'une bonne sensibilité et à grand cadran de lecture, indique la pression régnant dans le réservoir. Il est gradué de 0 à 6 kg/cm<sup>2</sup>. Pour les pressions plus basses, nous utilisons un autre manomètre semblable gradué de 0 à 1,5 kg/cm<sup>2</sup> ou bien un manomètre en U à mercure ou à eau. Un autre manomètre est disposé en N, gradué de 0 à 15 kg/cm<sup>2</sup>. R<sub>1</sub> est un robinet de vidange d'air, indispensable lors du remplissage d'eau du réservoir ou pour modifier rapidement la pression. R<sub>2</sub> est le robinet de remplissage, situé à la partie inférieure du cylindre.

Cet ensemble repose sur un col rigide en ciment. Le tube de verre est fixé au réservoir à une vingtaine de centimètres du fond (*fig. 11*). Il est maintenu solidement par une pièce spéciale P (*fig. 12*), munie d'un double presse-étoupe assurant une parfaite étanchéité. Cette pièce P se visse sur le réservoir. On peut ainsi changer rapidement de tube de verre.

Un thermomètre, gradué en degrés, est plongé dans l'eau au niveau du tube, mais pour les expériences précises nous avons préféré prendre la température de l'eau à la sortie du tube, à l'aide d'un second thermomètre gradué au 1/10 degré.

En réalité, il y a une légère dénivellation de quelques centimètres entre le tube et la prise du manomètre, nous n'en n'avons pas tenu compte, en général, sauf dans certains cas où les pressions étaient suffisamment petites pour être mesurées avec un manomètre à eau en forme de U.

On détermine la vitesse moyenne de l'écoulement, en mesurant la quantité d'eau écoulée pendant un temps donné (par exemple : 20 s) et recueillie dans une éprouvette

graduée. Il nous a semblé que cette méthode était plus précise que celle qui consiste à évaluer le temps nécessaire à remplir un récipient de volume connu. En effet, lorsque

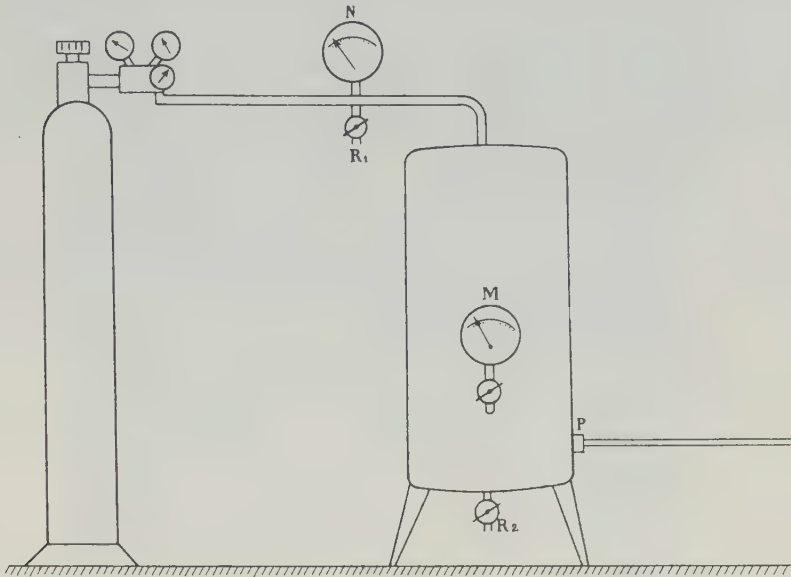


Fig. 11. — Schéma du dispositif expérimental

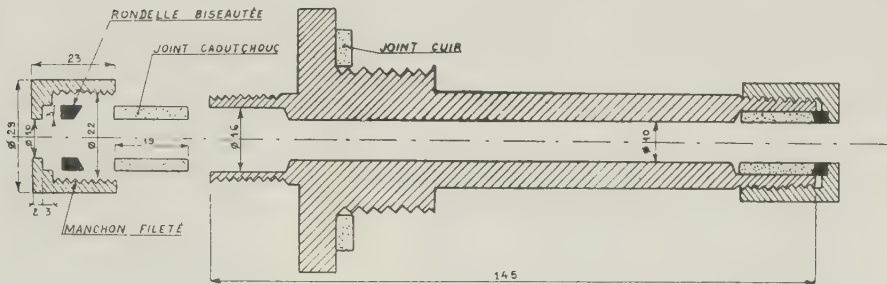


Fig. 12. — Pièce P à double presse-étoupe (cotes en mm)

le débit est assez important, il n'est pas facile de bien déterminer le moment du remplissage exact.

### Détermination du régime d'écoulement.

Il est facile de déterminer la nature du régime d'écoulement existant dans le tube, en observant l'aspect du jet à la sortie. En régime laminaire le jet est lisse, transparent comme une baguette de verre étiré, sur une longueur variant de quelques millimètres à plusieurs centimètres suivant la vitesse d'écoulement. Aux grandes vitesses, la partie lisse est petite, le jet se disperse ensuite rapidement en gouttelettes. En régime turbulent, le jet est comme ridé par une infinité de petites ondes, il perd sa transparence, il se disperse ensuite, mais moins rapidement que dans le cas précédent (cela tient à la différence de la répartition des vitesses dans la section droite de la veine) (fig. 13).

En régime laminaire, la région de passage P *zone lisse-zone dispersée* n'affecte pas toujours une forme de révolution, elle est assez irrégulière, sa place et sa forme varient quand on perturbe très légèrement l'écoulement, sans toutefois atteindre le régime turbulent. Cette région P se rapproche de l'extrémité A du tube, quand la vitesse augmente, puis semble se fixer à une distance de A égale à quelques diamètres.

Dans un certain nombre d'expériences, il était nécessaire de connaître la nature du régime entre deux points déterminés du tube; l'écoulement en aval, donc à la sortie

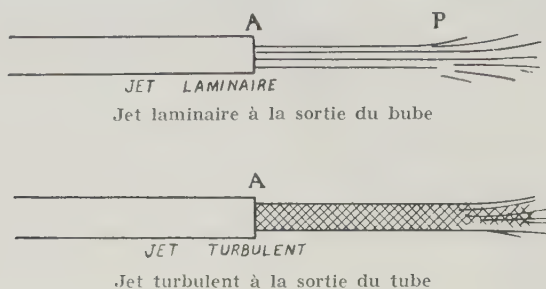


Fig. 13

du tube, pouvant être soit laminaire, soit turbulent. Nous avons pour cela mesuré la perte de charge entre ces deux points : pour un même débit, la perte de charge est notablement supérieure en régime turbulent qu'en régime laminaire.

En général, le passage du régime laminaire établi au régime turbulent établi s'opère par l'intermédiaire d'un régime de saccades (flashing). L'écoulement se fait par soubresauts violents, de plus en plus rapides à mesure que la vitesse augmente. Ce régime particulier, non permanent, fait actuellement l'objet d'une étude par M. SACKMANN [10]. Aux grands nombres de Reynolds toutefois, le passage se fait souvent brusquement, sans qu'on puisse observer ce régime saccadé.

## INTRODUCTION DE LA TURBULENCE DANS L'ÉCOULEMENT LAMINAIRE

### Obtention du régime laminaire aux grands nombres de Reynolds.

La méthode expérimentale que nous venons d'indiquer permet d'obtenir le régime laminaire jusqu'à des valeurs du nombre de Reynolds jamais encore atteintes.

Il est très facile, en effet, de dépasser le nombre  $\mathcal{R} = \frac{VD}{\nu} = 50\,000$  qui, depuis 1911, était la valeur maximum atteinte. Nous avons pu, en particulier, obtenir l'écoulement laminaire, d'une manière parfaitement stable jusqu'à  $\mathcal{R} = 70\,000$ , avec un tube de 3,25 mm de diamètre et de 94 cm de long.

Pour ces grandes valeurs de  $\mathcal{R}$ , la vitesse d'écoulement est notable ( $V$  est de l'ordre de 25 m/sec dans l'exemple précédent), et la force vive de l'eau est bien supérieure à la perte de charge par frottement. Celle-ci est en gros proportionnelle à  $V$  pour un tube donné, alors que la force vive est proportionnelle à  $V^2$ . L'augmentation de  $V$ ,

PLANCHE I

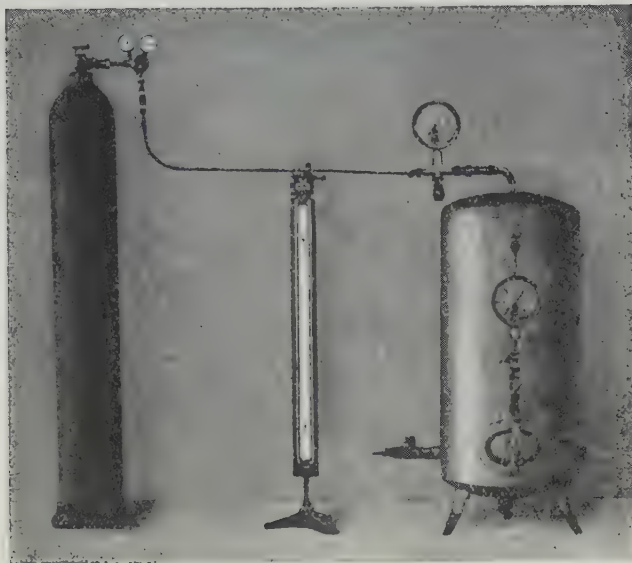


Fig. A. — Dispositif expérimental

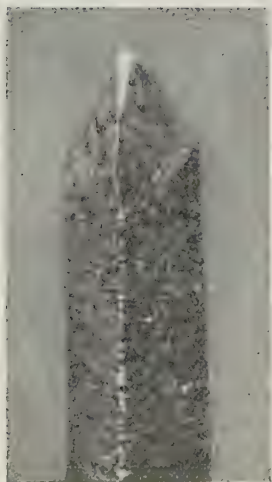


Fig. B. — Mèche à verre

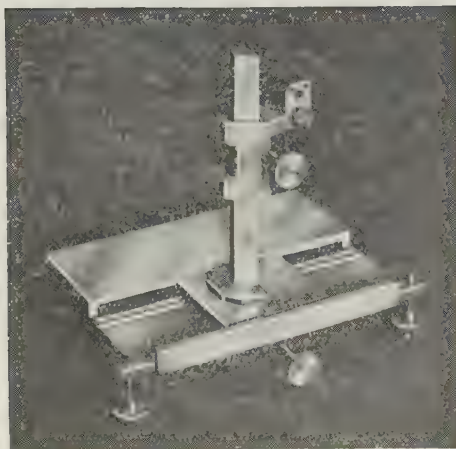


Fig. C. — Support à double crémaillère

donc de  $\mathcal{R}$ , nécessite une augmentation considérablement plus grande de la pression motrice qui règne dans le réservoir. Celui-ci ne pouvant supporter plus de  $6 \text{ kg/cm}^2$ , il faut donc prendre des tubes plus gros, mais aussi plus longs.

D'autre part le débit est alors très important et le réservoir trop petit pour permettre de faire une expérience de durée convenable. De plus, quand le diamètre du tube augmente, il devient très difficile de réaliser correctement le soufflage du pavillon d'entrée, chose que nous devions faire nous-mêmes puisqu'en général il fallait s'y prendre à plusieurs fois pour obtenir une forme satisfaisante.

Pour toutes ces raisons, nous avons pris dans nos expériences des tubes de diamètre au plus égal à  $6 \text{ mm}$ , qui nous permettaient tout de même d'obtenir le régime laminaire dans un grand intervalle du nombre de Reynolds.

Dans ces conditions il est facile d'observer le comportement de l'écoulement lorsqu'on le perturbe de différentes façons. Ainsi s'est imposée, suivant leur caractère, la division des perturbations en deux groupes, comme nous l'avons déjà dit; selon qu'elles sont d'origine extérieure ou d'origine géométrique ou systématique.

#### A) PERTURBATIONS D'ORIGINE EXTÉRIEURE OU MÉCANIQUE.

Elles sont d'ordre mécanique. Si leur intensité est suffisante, la turbulence se produit pendant la durée de la perturbation, mais le régime laminaire réapparaît lorsque leur action cesse (1).

##### a) Chocs.

En 1905, BARNES et COKER [2] avaient constaté qu'un choc appliqué à un tube parcouru par un courant d'eau en régime laminaire y provoquait la turbulence, mais après le choc l'état laminaire réapparaissait. Cette remarque déjà ancienne avait été complètement oubliée, puisque jusqu'à maintenant on pensait que la turbulence introduite par le choc se maintenait ensuite dans tout le tube.

Il était évidemment extrêmement facile de vérifier l'exactitude de l'affirmation de BARNES et COKER.

C'est ce que nous avons fait : un choc suffisant appliqué au tube ou au réservoir peut entraîner momentanément la turbulence dans l'écoulement, mais celle-ci ne se maintient pas, elle est comme entraînée par le mouvement général de l'eau qui reprend spontanément son aspect laminaire.

Nous verrons plus tard que ce résultat, pour être vérifié, impose d'avoir un tube démuné de tout appareil de mesure branché sur lui ou de robinet de réglage de débit, sinon la turbulence peut persister.

##### b) Agitation de l'eau.

Les chercheurs s'étaient attachés tout particulièrement à obtenir dans leur réservoir d'alimentation une eau parfaitement calme et reposée. Avant de commencer

(1) SCHILLER, NIKURADZE ont étudié la nature des tourbillons responsables de la turbulence dans les conduites et canaux (cf. références bibliographiques de PAGE [33]).

leurs expériences, ils laissaient l'eau se reposer pendant plusieurs heures, voire plusieurs jours, contrôlant même l'état d'agitation de l'eau en regardant évoluer dans le temps une goutte de fluide colorée introduite convenablement au sein de la masse liquide.

Leurs réservoirs étaient d'une contenance de 400 à 500 l par exemple et reposaient sur une solide assise rigide pour éviter toute vibration extérieure.

De même, l'agitation due aux phénomènes de convection thermique était réduite au minimum — autant que possible.

Nous avons utilisé un réservoir de 125 l environ. Nous effectuions nos expériences une demi-heure ou une heure après le remplissage. Le fait d'attendre plusieurs heures ou plusieurs jours ne nous a pas donné de résultats sensiblement différents les uns des autres. Aucune précaution particulière n'avait été prise pour éviter les actions thermiques extérieures.

Il suffit en tout cas que l'eau soit à peu près reposée avant de commencer une expérience, mais, semble-t-il, d'autant plus que le diamètre  $D$  du tube était plus grand comme déjà l'avaient aussi remarqué BARNES et COKER.

Un autre phénomène que nous n'avons pas essayé d'éliminer, mais qui probablement donne un certain trouble dans l'écoulement de l'eau, est le suivant : lorsqu'à la fin d'une expérience le réservoir se trouve presque vide, on voit soudain se produire la turbulence dans l'écoulement qui, jusqu'alors, était laminaire. Pour faire disparaître cette turbulence, il est nécessaire de réduire énormément la vitesse de l'eau. Cet effet inattendu est probablement dû au dégagement de l'air qui s'est dissout dans la partie supérieure de la masse liquide du réservoir pendant le cours de l'expérience où la pression motrice atteint plusieurs atmosphères. On pourrait y remédier en utilisant, au lieu d'air, un gaz très peu soluble dans l'eau ou tout simplement en recouvrant la surface d'une mince pellicule d'huile formant ainsi écran imperméable. On pourrait croire aussi qu'une certaine perturbation se produit dans les lignes de courant quand la surface libre se rapproche du niveau du tuyau, mais c'est peu probable sauf au voisinage immédiat de ce niveau. Ainsi la première explication semble préférable.

#### *c) Entrée ou sortie de liquide par un trou percé dans la conduite.*

Si on perce un trou dans la paroi d'un tube où circule de l'eau sous pression, une fuite d'eau se produit qui provoque des perturbations dans l'écoulement pouvant entraîner un changement de régime dans le tube. Il est intéressant de savoir de quelle importance doit être cette fuite pour provoquer la modification et si le changement affecte tout le tube ou seulement la partie aval du tube.

#### **Réalisation des trous dans les parois de verre. Dispositif expérimental.**

Nous avons percé dans les parois des tubes de verre des trous  $T$  de faible dimension, à mi-longueur du tube. Ces trous sont réalisés à l'aide d'une mèche à verre (Planche I, *fig. B*) actionnée à la main (*fig. 14*). La technique opératoire est simple quoique un peu délicate. (Au début nous mettions plusieurs heures pour réaliser un trou correctement, mais avec un peu d'habitude une demi-heure suffisait.)

L'opération est suivie au microscope ou à la loupe. Les trous obtenus par cette méthode présentent rarement une apparence parfaitement circulaire, surtout quand ils sont très petits. La plupart du temps ils ont une forme elliptique plus ou moins régulière et parfois déchiquetée, à cause des petites écailles de verre arrachées à la fin du percement.

Dans les calculs qui suivent, nous avons assimilé ces trous à des ellipses en première approximation, pour en déterminer la surface  $S$ .

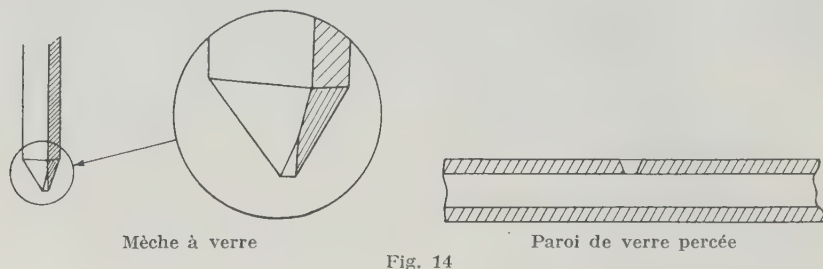


Fig. 14

Les trous ont un diamètre moyen de quelques dixièmes de millimètres, cinq à trente fois plus petit que celui du tube.

La présence du trou, lorsqu'on le ferme simplement avec un manchon pour éviter toute fuite, ne semble pas apporter de perturbation notable à l'écoulement principal.

Grâce à un manchon  $M$ , métallique facilement amovible, le trou  $T$  est relié par un tube de caoutchouc, soit à un manomètre à mercure ou à eau, soit à un tube de verre horizontal  $H$  dont la cote est réglable (fig. 15 et Planche II, fig. E).

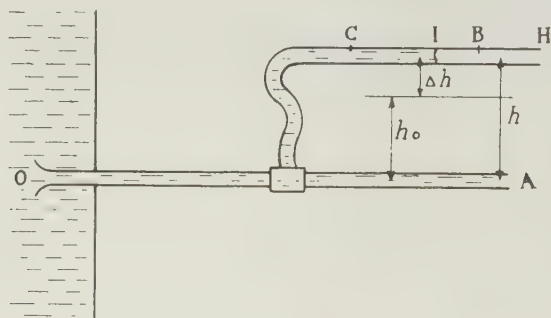


Fig. 15. — Dispositif expérimental

Ce manchon  $M$ , démontable, entoure solidement le tube en comprimant un petit manchon ( $m$ ) de caoutchouc pour réaliser une parfaite étanchéité (fig. 16).

Quand le régime laminaire est établi dans la conduite principale  $OA$ , le ménisque  $I$  du tube  $H$  reste immobile pour une certaine valeur  $h_0$  de  $h$ . On mesure, pour différentes valeurs croissantes de  $\Delta h = \Delta h_1, \Delta h_2, \Delta h_3, \dots$ , etc., le temps  $t = t_1, t_2, t_3$ , etc., mis par le ménisque  $I$  pour franchir la distance constante  $BC$  comprise entre deux repères fixes, c'est-à-dire pour que s'écoule à travers  $T$  un volume d'eau connu.

PLANCHE II

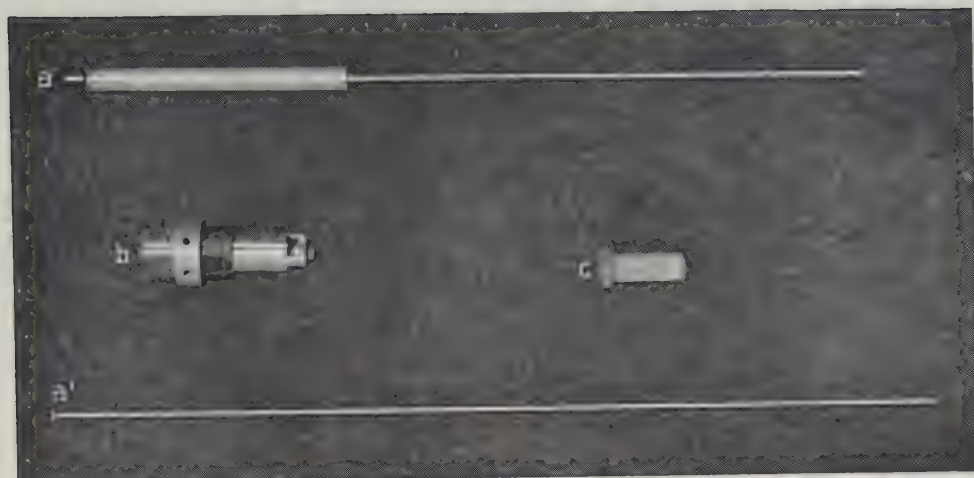


Fig. D. — *a; a'*. Conduite circulaire  
*b*. Conduite annulaire  
*c*. Conduite plane

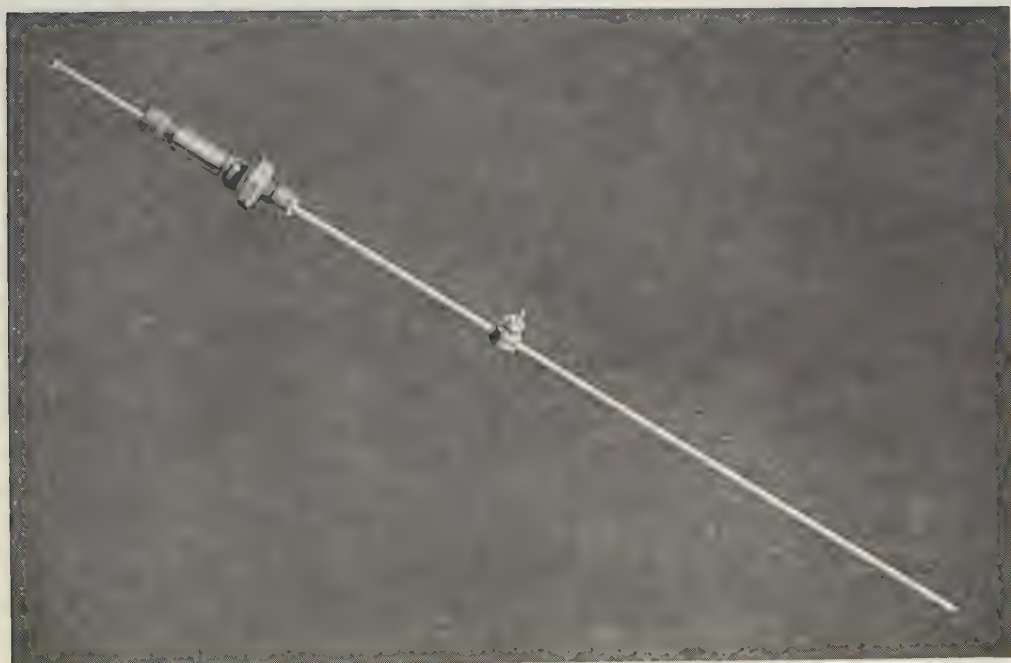


Fig. E. — Tube percé d'un trou

On détermine ensuite le temps critique  $t$ , donc le débit critique  $q_c$  et, par suite, la vitesse critique  $v_c = \frac{q_c}{S}$  correspondant juste au début de la turbulence : cette turbulence se manifeste par un régime d'écoulement saccadé (flashing) et par l'oscillation du ménisque I.

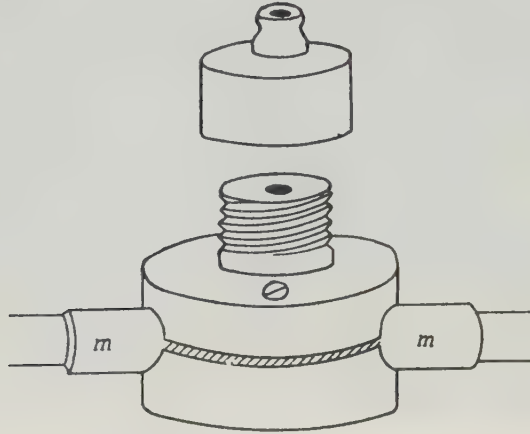


Fig. 16. — Manchon métallique M

On trace donc la courbe donnant  $\Delta h$  en fonction de  $t$ . Dès qu'on approche de la dénivellation critique, on fait croître  $\Delta h$  très lentement. Au moment où la première saccade se produit on note la dénivellation  $\Delta h_c$  qui, portée sur la courbe précédente, permet par extrapolation de déterminer  $t_c$ . L'erreur commise est faible car dans cette région la courbe devient très plate (fig. 17).

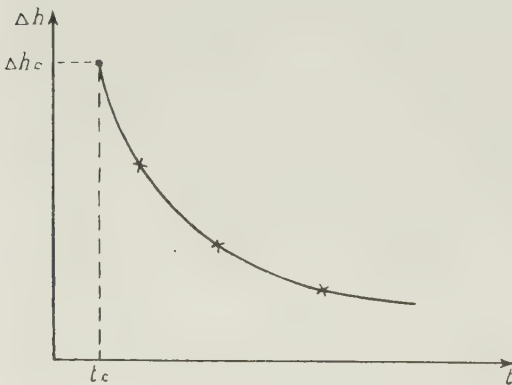


Fig. 17. — Détermination de  $t_c$

Si  $u$  est le volume constant compris entre les index fixes B et C, on a :

$$q_c = \frac{u}{t_c}, \quad v_c = \frac{u}{S \cdot t_c}.$$

Ce calcul suppose que la vitesse de déplacement du ménisque est constante, ce qui est exact en admettant :

1° que l'opération est assez rapidement menée pour pouvoir négliger les variations de niveau de liquide dans le réservoir. Ces expériences ont été faites en laissant l'eau s'écouler par simple gravité, sans la mettre sous pression dans la cuve;

2° que le ménisque I a atteint sa vitesse de régime, quand il passe à la hauteur de l'index B, ce qui ne présente aucune difficulté;

3° que la perte de charge entre le manchon M et I ne varie sensiblement pas, quand I se déplace, ce qui est sûrement réalisé en prenant un tube H de diamètre grand par rapport à celui du trou T.

Pour un tube donné, on trace alors les courbes donnant la valeur de  $v_c$  en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement principal — pour des trous de diamètres différents et progressivement croissants. — Puis on recommence les mêmes opérations avec un nouveau tube, d'un diamètre  $D$  différent.

### Résultats des expériences.

#### α) EFFET D'UNE RENTRÉE D'EAU PAR LE TROU.

Le dispositif expérimental précédent ne nous a servi que pour faire des mesures quantitatives dans le cas d'une rentrée d'eau dans le tube.

Si le débit  $q$  à travers le trou  $T$  est petit, la perturbation qu'il apporte à l'écoulement principal n'est pas suffisante pour y provoquer un changement de régime. Le régime reste laminaire dans tout le tube  $OA$ .

Si le débit  $q$  augmente, l'écoulement principal n'est plus laminaire à la sortie de  $A$ ; il est, soit saccadé, soit turbulent selon l'importance de  $q$ .

Toutefois, l'écoulement est resté laminaire de l'embouchure  $O$  jusqu'au trou  $T$  : la turbulence se localise donc en aval du trou. On vérifie en montrant qu'en amont de  $T$  l'écoulement obéit à la loi de Poiseuille (voir plus loin les phénomènes d'auto-entretien).

Si le débit  $q$  diminue ou cesse, le mouvement laminaire se rétablit spontanément, en particulier en aval du trou, de  $T$  à  $A$ .

L'expérience montre que pour un tube donné et un trou donné le temps critique

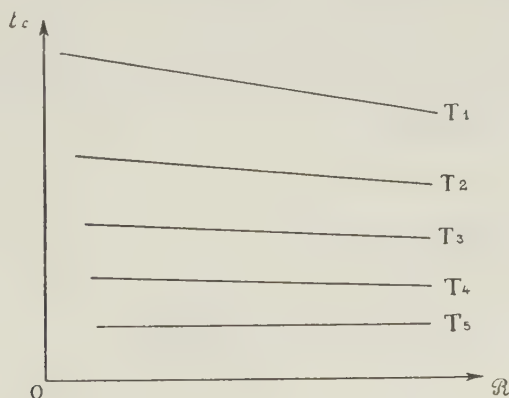


Fig. 18. — Courbes donnant les variations de  $t_c$  en fonction du nombre de Reynolds de l'écoulement principal pour différents trous de diamètres croissants  $T_1, T_2, T_3, \dots$ , etc.

mesuré  $t_c$  diminue légèrement quand  $V$  augmente ( $V$  = vitesse moyenne de l'écoulement principal).

La relation semble linéaire, la pente de la droite représentative est d'autant plus faible que le trou  $T$  est plus gros et plus circulaire (*fig. 18*). Comme de toute façon la pente est petite, on peut dire aussi que la relation entre  $v_c$  et  $V$  est linéaire dans le domaine étudié, et que  $v_c$  augmente légèrement avec  $V$ .

D'autre part, pour un tube donné, si l'on agrandit progressivement le trou, pour une même vitesse  $V$ , la vitesse critique  $v_c$  diminue.

Nous avons opéré dans un domaine  $\mathcal{R} = \frac{VD}{v}$  variant de 2000 à 13 000 environ et avec des tubes dont le diamètre  $D$  était compris entre 2 et 6 mm.

En portant sur un graphique le « nombre de Reynolds du trou »  $y = \frac{v_c d}{v}$ , formé avec la vitesse critique  $v_c$ , en fonction du paramètre sans dimension  $x = \frac{v_c D}{v d}$ , les points

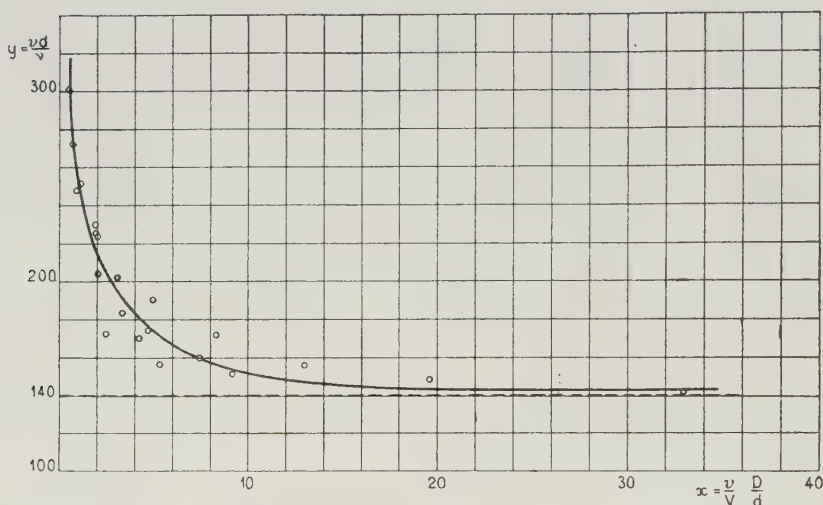


Fig. 19

expérimentaux se trouvent sensiblement sur une même courbe ( $\Gamma$ ) qui décroît lorsque  $x$  croît et tend vers une valeur limite de  $\frac{v_c d}{v} = 140$  quand  $x$  est grand (fig. 19).

Nous avons assimilé dans les calculs le trou à une ellipse d'axes  $a$  et  $b$  et pris pour diamètre hydraulique l'expression :

$$d = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}}$$

Le rapport  $\frac{D}{d}$  a varié de 30 à 4,7.

On trouvera dans l'annexe I la justification de cette définition ainsi que des résultats d'expériences et la conduite des calculs numériques effectués sur deux tubes de 3,45 mm et 4,6 mm de diamètre.

Ces résultats présentent une certaine importance, puisqu'ils permettent de préciser le caractère perturbateur d'un écoulement parasite par son « nombre de Reynolds », qu'on peut représenter graphiquement à l'aide d'un nombre sans dimension en fonction des paramètres de la conduite.

## REMARQUES.

I. — Un phénomène inattendu a, pendant longtemps, provoqué des résultats aberrants qui empêchaient de tirer toute conclusion. C'est le suivant : lorsque l'eau rentre par le trou T, dans l'écoulement principal, ce dernier devient particulièrement sensible aux chocs les plus légers et même aux ondes sonores, surtout quand on approche de la vitesse critique  $v_c$ . Un bruit de pas, un objet qui tombe, une porte qui se ferme, etc., suffisent pour provoquer la turbulence (régime de saccades). Il faut donc opérer dans un silence complet pour déterminer exactement le moment où la turbulence s'installe d'elle-même. Or, notre appareil se trouvait dans un grand hall contenant de nombreuses machines et moteurs électriques ou à explosion. Le bruit de ces machines en fonctionnement produisait une turbulence précoce dans le tube. Les mesures fournissaient ainsi des résultats peu concordants si l'on n'opérait pas dans le plus grand silence.

II. — Il aurait été intéressant de faire des expériences pour diverses valeurs de la viscosité cinématique  $\nu$ . Toutes les autres quantités introduites dans les calculs ont varié. Mais cela nécessitait certaines complications de montage. Nous avons fait cependant une mesure à ce sujet, en chauffant l'eau vers une température de  $37^\circ$  (au lieu d'une vingtaine de degrés dans les expériences courantes)  $\nu$  variait ainsi de 30 %. Le point correspondant à cette mesure se trouvait bien sur la courbe (T).

### β) EFFET PRODUIT PAR UNE FUITE D'EAU PAR LE TROU.

Nous n'avons étudié que qualitativement ce phénomène (*fig. 20*). Quand le débit de fuite  $q$  est petit, l'écoulement principal reste laminaire, quand  $q$  dépasse une cer-

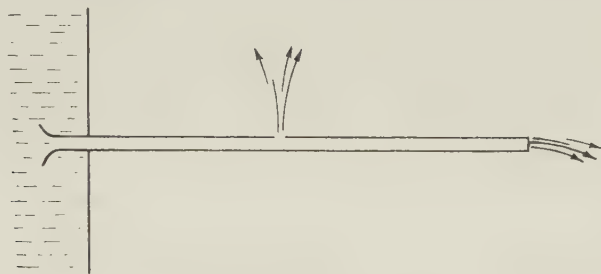


Fig. 20. — Fuite d'eau

taine valeur, la turbulence se manifeste à la sortie A comme dans le cas précédent. Pour un écoulement donné, le débit parasite critique est beaucoup plus grand pour une fuite que pour une rentrée d'eau.

Quand, par exemple, on augmente la pression  $P$  de l'air dans le réservoir, la fuite augmente d'importance en même temps que le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$  de l'écoulement principal. Pour une certaine valeur  $\mathcal{R}_1$  de  $\mathcal{R}$ , le régime change à la sortie A du tube. Si l'on diminue alors la pression  $P$ , l'état laminaire ne réapparaît pas pour  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$ , mais pour  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2$  avec  $\mathcal{R}_2 < \mathcal{R}_1$ .

Donc, dans l'intervalle  $\mathcal{R}_2 < \mathcal{R} < \mathcal{R}_1$ , on peut avoir l'un ou l'autre régime.

Si dans cet intervalle le régime est laminaire, il passe facilement à la turbulence et, d'une manière irréversible, à la suite d'une perturbation légère (choc, bruit, etc.).

Si dans cet intervalle le régime est turbulent, on peut rétablir l'état laminaire en obturant le trou momentanément (une fraction de seconde par exemple). Il faut que l'obturation soit convenable. Si on la réalise avec un manchon de caoutchouc peu rigide, il peut se produire un phénomène d'auto-oscillation et l'état laminaire ne se rétablira pas (voir plus loin les phénomènes d'auto-entretien).

## B) PERTURBATIONS D'ORIGINE GÉOMÉTRIQUE OU SYSTÉMATIQUE

Quand la vitesse d'écoulement augmente le régime laminaire finit toujours, en l'absence de perturbations extérieures, par céder définitivement la place au régime turbulent pour un nombre de Reynolds critique  $\mathcal{R}_c$ . Celui-ci dépend de la forme géométrique de la canalisation et du dispositif expérimental employé.

### COURBURE DES TUBES

#### a) ÉTUDE THÉORIQUE.

Plusieurs auteurs se sont efforcés de déterminer les lois et propriétés de l'écoulement laminaire dans un tube lisse de section circulaire de rayon  $a = \frac{D}{2}$  et courbé suivant un cercle de rayon  $r$  <sup>(1)</sup>. La courbure a pour effet de superposer au mouvement principal un mouvement secondaire caractéristique. Le fluide qui s'écoule forme deux noyaux indépendants l'un de l'autre, symétriques par rapport au plan de symétrie du tube.

A l'intérieur de chaque noyau, les lignes de courant ont une allure hélicoïdale, dont la *figure 21* représente la projection sur une section droite. La direction du mouvement est indiqué par les flèches. Ce mouvement secondaire a pour effet d'augmenter la perte de charge pour un débit donné et de rejeter du milieu vers la paroi externe le point de vitesse maximum.

De nombreuses études ont été faites pour déterminer ces changements dans l'écoulement et l'augmentation de la résistance (références [11] à [18]) mais le nombre des travaux théoriques sur ce sujet est très restreint. La résolution des équations du mouvement est particulièrement difficile. DEAN [19] a pu le faire par une méthode d'approximation moyennant la condition  $\frac{a}{r} \ll 1$ . Il a retrouvé ainsi théoriquement la forme des lignes de courant indiquée précédemment.

Toutefois ses calculs ne sont valables qu'à la condition :

$$\frac{\mathcal{R}^2}{1515} \cdot \frac{a}{r} < 1 \quad \text{avec} \quad \mathcal{R} = \frac{wD}{\nu},$$

$w$  est la vitesse d'écoulement au centre;

$\nu$  est la viscosité cinématique;

donc pour les très petites valeurs du nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$ .

---

(1)  $r$  est le rayon de courbure de la fibre neutre, c'est-à-dire de la ligne des centres des sections.

L'accord avec l'expérience est bon, en général, mais ne peut être que qualificatif car les conditions expérimentales (celles d'EUSTICE [13], par exemple), correspondaient à des valeurs de  $\frac{R^2 a}{1515 r}$  supérieures à 1 (voir Annexe II).

ADLER [18] développa une théorie fondée sur la considération de la couche limite laminaire de Prandtl. Sa théorie s'est vérifiée pour des nombres de Reynolds en général plus grands que ceux de DEAN (par exemple  $R = 3\,000$  pour  $\frac{a}{r} = \frac{1}{200}$ ).

En essayant d'établir une relation entre la courbure du tube et l'augmentation de perte de charge qu'elle entraîne (de sorte que la loi classique de Poiseuille n'est plus vérifiée), DEAN et ADLER, par deux méthodes différentes, ont été amenés à introduire dans leurs calculs le paramètre sans dimension  $K = R \sqrt{\frac{a}{r}}$  (nombre de DEAN). Les résultats du premier ne sont valables que pour les faibles valeurs de  $K$ , ceux du second correspondent à une loi valable pour les grandes valeurs de  $K$ .

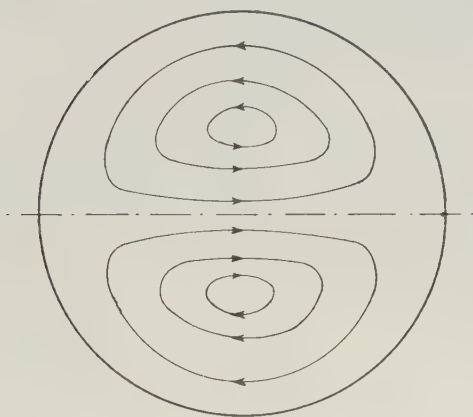


Fig. 21. — Schéma des lignes de courant du mouvement secondaire

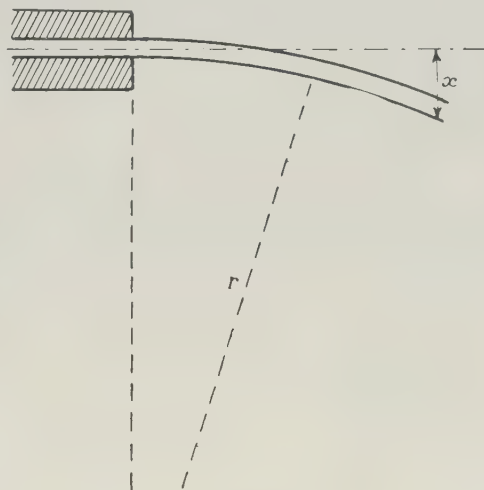


Fig. 22

Par ailleurs, en dehors du fait que justement ce paramètre  $K$  intervient pour limiter la portée des calculs de DEAN, il est intéressant de signaler qu'on le retrouve dans les travaux de GÖRTLER pour définir la limite de stabilité de la couche limite bidimensionnelle d'une plaque; stabilité étudiée à la lumière de la théorie de Tollmien-Schlichting (travaux vérifiés expérimentalement par LIEPMANN pendant cette dernière guerre).

Tous ces résultats laissent penser que ce paramètre, qui est d'une importance capitale pour caractériser l'influence de la courbure, doit aussi l'être pour définir l'apparition de la turbulence quand elle est justement provoquée par la courbure.

On peut faire le raisonnement suivant :

— considérons un tube encastré à une extrémité et de longueur libre  $l$ . Supposons-le courbé légèrement suivant un arc de cercle de rayon  $r$  comme l'indique la figure 22.

Si on admet que  $\frac{x}{r} \ll 1$ , on peut écrire,  $x$  étant la flèche du tube :

$$2rx = l^2, \quad r = \frac{l^2}{2x}.$$

Admettons que la turbulence se produise pour une valeur donnée  $K_0$  de  $K$  :

$$(1) \quad K_0^2 = \mathcal{R}^2 \frac{a}{r},$$

d'où :

$$(2) \quad \mathcal{R} = \frac{K_0 l}{\sqrt{2a}} \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Dans cette hypothèse le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}$ , correspondant à l'apparition de la turbulence, serait proportionnel à  $\sqrt{\frac{r}{a}}$  (relation 1). La relation 2 serait à vérifier expérimentalement.

#### b) ÉTUDE EXPÉRIMENTALE.

Dans une série d'expériences nous avons essayé de préciser la relation entre la disparition du régime laminaire et la courbure du tube [21]. Dans ce but, nous avons utilisé des tubes du commerce encastrés sur une partie de leur longueur et dont l'extré-

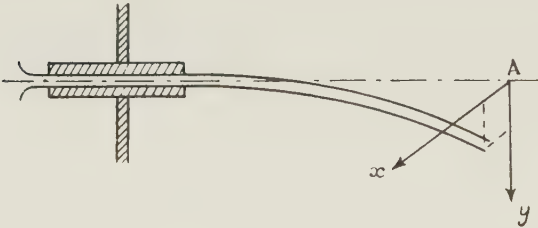


Fig. 23. — Tube encastré courbé

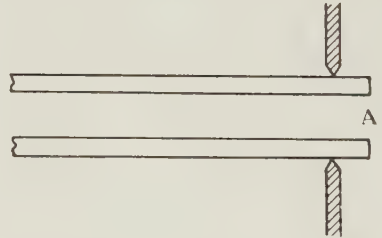


Fig. 24. — Entraînement de l'extrémité du tube

mité libre A peut subir un déplacement mesurable dans deux directions rectangulaires : horizontale et verticale (*fig. 23*). L'extrémité A est engagée de quelques millimètres dans une plaque mince d'aluminium percée d'un trou d'un diamètre à peine supérieur à celui du tube. Les bords du trou sont biseautés (*fig. 24*).

La plaque d'aluminium est entraînée par un dispositif comportant deux crémaillères : l'une pour le déplacement vertical, l'autre pour le déplacement horizontal. Chaque crémaillère possède une échelle graduée en millimètres (Planche I, *fig. C*).

La seule force s'exerçant sur le tube en A est donc normale à la direction de l'axe du tube au repos.

c) RÉALISATION DE L'ENCASTREMENT.

La partie encastrée du tube doit être solidement fixée au réservoir d'eau.

Nous avons d'abord fait quelques expériences en prenant simplement un tube fixé comme précédemment, c'est-à-dire maintenu par le système de double presse-étoupe de la pièce P vissée au réservoir. Ainsi réalisé l'encastrement est loin d'être parfait et quand on courbe le tube, la flexion se produit également à l'intérieur de la pièce P, entre les deux presse-étoupe.

Il est donc nécessaire de maintenir rigidement le tube de verre sur une partie de sa longueur. Un dispositif qui s'est révélé excellent, en même temps que parfaitement

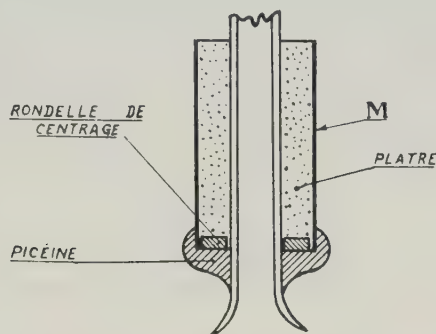


Fig. 25. — Encastrement du tube.

étanche, consiste à sceller au plâtre le tube de verre dans un manchon d'aluminium M (fig. 25). Une rondelle de centrage en caoutchouc ou en liège permettait de couler facilement le plâtre dans le manchon. Après durcissement du plâtre, on recouvre la rondelle d'un capuchon de picéine de manière à réaliser une étanchéité parfaite. Le man-

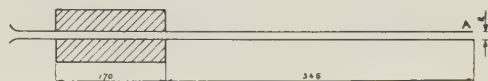


Fig. 25 bis

chon M est ensuite maintenu dans une pièce analogue à la pièce P, mais ne comportant qu'un seul presse-étoupe, et qui se visse au réservoir. Il est ainsi facile de changer de tube. Chaque tube est solidaire de son manchon auquel il est fixé définitivement (Planche II, fig. D).

d) RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

Pour un nombre de Reynolds donné  $\mathcal{R} = \frac{WD}{v}$ , le régime reste laminaire à la sortie du tube, à condition que l'extrémité A se déplace à l'intérieur d'une courbe fermée, considérée comme plane en première approximation puisque la courbure d'un tube de verre ne peut être que petite, sous peine de le briser. Cette courbe, grossièrement circulaire quand  $\mathcal{R}$  est petit, se déforme quand  $\mathcal{R}$  augmente et prend les aspects les plus divers, chaque courbe étant intérieure à la précédente. On passe toutefois d'une manière continue d'une courbe à la suivante (fig. 26).

La détermination du passage d'un régime à l'autre est assez délicate : parfois la transition est brusque, mais souvent c'est le régime de saccades qui apparaît. La position de l'extrémité A n'est souvent pas connue à moins de 0,5 mm près. Les courbes ainsi tracées ne peuvent donner qu'une allure générale du phénomène <sup>(1)</sup>.

Avec les tubes employés il semble difficile d'établir une relation numérique entre la courbure du tube et le nombre de Reynolds critique  $R_c$  au-dessus duquel le

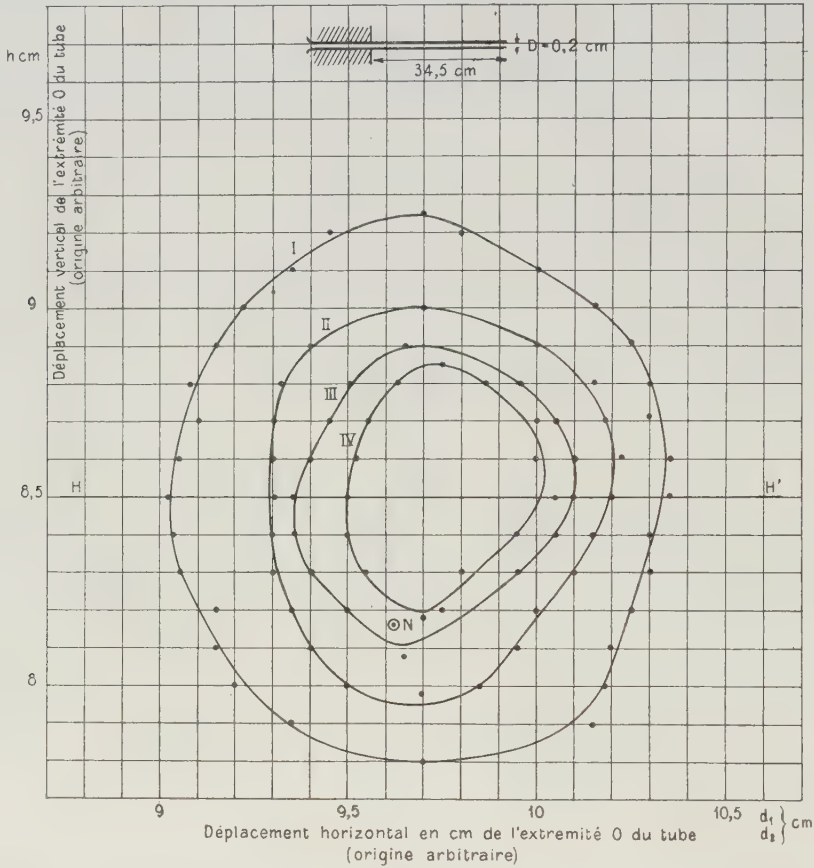


Fig. 26

régime n'est plus laminaire. Cela est dû à ce que la forme que prend le tube lors de la flexion n'est pas bien définie dans chaque direction, soit en raison de la courbure initiale à peu près inévitable des tubes de commerce, soit à cause de la non-homogénéité de leurs parois, ou parce que leur section n'est pas parfaitement circulaire.

On peut dire, toutefois, que l'influence de la courbure se fait sentir d'autant plus que le nombre de Reynolds est plus grand, comme l'indique la *figure 27* qui donne la

(1) Il faut signaler que chaque courbe tracée sur la *figure 26* correspond à une pression motrice  $P$  constante dans le réservoir. En réalité quand, dans ces conditions, le tube subit une flexion, le débit diminue comme nous l'avons déjà signalé, donc aussi le nombre de Reynolds.

Toutefois, cette variation semble assez petite, de l'ordre de  $\frac{1}{30}$  dans le cas des mesures faites, pour être comprise dans les erreurs d'expériences.

valeur de  $\mathcal{R}_c$ , quand le tube courbé reste dans un même plan. Le nombre critique  $\mathcal{R}_c$  diminue quand la courbure augmente. Pour une flexion nulle on n'obtient de valeur infinie pour  $\mathcal{R}_c$ . Au voisinage du sommet de la courbe, d'autres causes de perturbations doivent intervenir (conicité du tube, forme défectueuse du pavillon), de sorte que les valeurs déterminées expérimentalement ne concernent plus la courbure du tube mais un ou plusieurs autres paramètres.

Il est cependant intéressant de noter qu'en dehors de la région du sommet, l'allure hyperbolique des courbes tracées est conforme à ce qu'on aurait pu prévoir

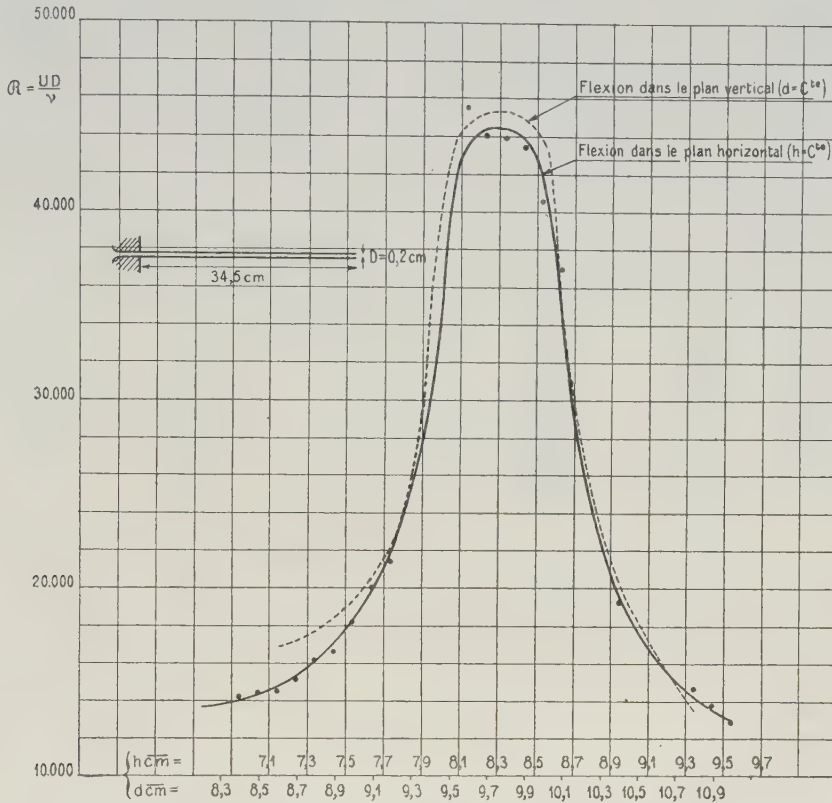


Fig. 27

d'après la formule 2<sup>(1)</sup>. Malheureusement cette relation n'a pu être vérifiée numériquement — elle ne serait d'ailleurs plus valable pour les fortes courbures. L'allure des courbes expérimentales permet de penser qu'elles doivent être tangentes asymptotiquement, non pas à la droite  $\mathcal{R} = 0$  (comme le voudrait l'équation 2), mais à une certaine droite  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0$  <sup>(2)</sup>.

(1) En réalité la forme théorique que prend le tube dans les conditions d'expériences n'est pas un arc de cercle. Mais à l'extrémité encastrée, où la courbure  $\frac{1}{r}$  est maximum, on peut appliquer la formule 2 à condition de remplacer le coefficient numérique 2 par 3.

(2) Il faut noter cependant que le nombre de Reynolds critique inférieur, voisin de 2 000 pour un tube rectiligne, augmente avec la courbure et atteindrait, d'après WHITE [10], la valeur 7 700 pour  $\frac{r}{a} = 15$ .

En conclusion, nos expériences, où le rapport  $\frac{a}{r}$  est resté supérieur à 4000, montrent bien que c'est la forme géométrique qui intervient pour définir le nombre de Reynolds critique du tube, en dehors de toute autre perturbation. Quand la forme géométrique change, le nombre  $R_c$  change.

Pour une position fixe, repérée par  $h$  sur la crémaillère verticale, le tableau suivant correspondant à la *figure 26* donne les positions  $d_1$  et  $d_2$ , repérées sur la crémaillère horizontale, entre lesquelles le régime reste laminaire à la sortie du tube.  $P$  est la pression motrice dans le réservoir, comptée en centimètres d'eau. Ces résultats sont relatifs à un tube de verre encastré de 52,4 cm de longueur totale dont 34,6 cm de longueur libre et 0,1 cm de rayon (*fig. 25 bis*).

$h$  et  $d$  sont en centimètres, comptés à partir d'origines arbitraires.

| P = 1 050 cm d'eau $\theta^\circ = 23^\circ,5$<br>$R = 18\,000$ |          |          | P = 1 660 cm d'eau $\theta^\circ = 23^\circ,5$<br>$R = 24\,500$ |          |          |
|-----------------------------------------------------------------|----------|----------|-----------------------------------------------------------------|----------|----------|
| $h$ cm                                                          | $d_1$ cm | $d_2$ cm | $h$ cm                                                          | $d_1$ cm | $d_2$ cm |
| 7,7                                                             | 9,7      | 9,7      | 7,95                                                            | 9,7      | 9,7      |
| 7,9                                                             | 9,35     | 10,15    | 8                                                               | 9,5      | 9,85     |
| 8,0                                                             | 9,2      | 10,18    | 8,1                                                             | 9,4      | 9,95     |
| 8,1                                                             | 9,15     | 10,2     | 8,2                                                             | 9,35     | 10       |
| 8,2                                                             | 9,15     | 10,25    | 8,3                                                             | 9,3      | 10,1     |
| 8,3                                                             | 9,05     | 10,3     | 8,4                                                             | 9,3      | 10,15    |
| 8,4                                                             | 9,03     | 10,3     | 8,5                                                             | 9,3      | 10,2     |
| 8,5                                                             | 9,02     | 10,35    | 8,6                                                             | 9,3      | 10,22    |
| 8,6                                                             | 9,05     | 10,35    | 8,7                                                             | 9,3      | 10,18    |
| 8,7                                                             | 9,1      | 10,3     | 8,8                                                             | 9,32     | 10,15    |
| 8,8                                                             | 9,08     | 10,3     | 8,9                                                             | 9,4      | 10       |
| 8,9                                                             | 9,15     | 10,25    | 9                                                               | 9,7      | 9,7      |
| 9,0                                                             | 9,22     | 10,15    |                                                                 |          |          |
| 9,1                                                             | 9,35     | 10       |                                                                 |          |          |
| 9,2                                                             | 9,45     | 9,8      |                                                                 |          |          |
| 9,25                                                            | 9,7      | 9,7      |                                                                 |          |          |

| P = 2 550 cm d'eau $\theta^\circ = 24^\circ$<br>$R = 32\,500$ |          |          | P = 3 980 cm d'eau $\theta^\circ = 23^\circ,5$<br>$R = 41\,000$ |          |          |
|---------------------------------------------------------------|----------|----------|-----------------------------------------------------------------|----------|----------|
| $h$ cm                                                        | $d_1$ cm | $d_2$ cm | $h$ cm                                                          | $d_1$ cm | $d_2$ cm |
| 8,08                                                          | 9,65     | 9,65     | 8,18                                                            | 9,7      | 9,7      |
| 8,2                                                           | 9,5      | 9,75     | 8,3                                                             | 9,55     | 9,8      |
| 8,3                                                           | 9,4      | 9,95     | 8,4                                                             | 9,5      | 9,95     |
| 8,4                                                           | 9,35     | 10,05    | 8,5                                                             | 9,5      | 10,05    |
| 8,5                                                           | 9,35     | 10,1     | 8,6                                                             | 9,52     | 10       |
| 8,6                                                           | 9,4      | 10,1     | 8,7                                                             | 9,55     | 10       |
| 8,7                                                           | 9,45     | 10,05    | 8,8                                                             | 9,63     | 9,87     |
| 8,8                                                           | 9,5      | 9,95     | 8,95                                                            | 9,75     | 9,75     |
| 8,9                                                           | 9,65     | 9,65     |                                                                 |          |          |

Le tableau suivant, qui correspond aux courbes de la *figure 27*, donne la valeur maximum du nombre de Reynolds au-dessus duquel le régime cesse d'être laminaire, le tube étant courbé soit dans le plan horizontal, soit dans un plan vertical.

| COURBURE DANS LE PLAN VERTICAL<br>$d = 9,7 \text{ cm}$ $\theta^\circ = 23^\circ,5$ |                 | COURBURE DANS LE PLAN HORIZONTAL<br>$h = 8,5 \text{ cm}$ $\theta^\circ = 23^\circ$ |                 |
|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| $h \text{ cm}$                                                                     | $R_c (= 687 Q)$ | $d \text{ cm}$                                                                     | $R_c (= 680 Q)$ |
| 7,5                                                                                | 17 500          | 8,2                                                                                | 13 700          |
| 7,6                                                                                | 18 200          | 8,3                                                                                | 13 900          |
| 7,7                                                                                | 18 900          | 8,4                                                                                | 14 300          |
| 7,8                                                                                | 19 600          | 8,5                                                                                | 14 500          |
| 7,9                                                                                | 21 600          | 8,6                                                                                | 14 500          |
| 8,0                                                                                | 24 000          | 8,7                                                                                | 15 200          |
| 8,1                                                                                | 30 000          | 8,8                                                                                | 16 200          |
| 8,2                                                                                | 38 800          | 8,9                                                                                | 16 700          |
| 8,3                                                                                | 44 500          | 9,0                                                                                | 18 200          |
| 8,4                                                                                | 45 000          | 9,1                                                                                | 20 000          |
| 8,5                                                                                | 44 500          | 9,2                                                                                | 21 400          |
| 8,6                                                                                | 45 500          | 9,3                                                                                | 26 000          |
| 8,7                                                                                | 45 000          | 9,4                                                                                | 30 000          |
| 8,8                                                                                | 38 800          | 9,5                                                                                | 38 800          |
| 8,9                                                                                | 31 000          | 9,6                                                                                | 45 500          |
| 9,0                                                                                | 25 000          | 9,7                                                                                | 44 000          |
| 9,1                                                                                | 21 700          | 9,8                                                                                | 43 800          |
| 9,2                                                                                | 18 600          | 9,9                                                                                | 43 400          |
| 9,3                                                                                | 18 600          | 10,0                                                                               | 40 500          |
| 9,4                                                                                | 14 600          | 10,1                                                                               | 36 900          |
| 9,5                                                                                | 14 600          | 10,2                                                                               | 27 800          |
|                                                                                    |                 | 10,3                                                                               | 22 800          |
|                                                                                    |                 | 10,4                                                                               | 19 100          |
|                                                                                    |                 | 10,5                                                                               | 17 800          |
|                                                                                    |                 | 10,6                                                                               | 16 100          |
|                                                                                    |                 | 10,7                                                                               | 15 000          |
|                                                                                    |                 | 10,8                                                                               | 14 600          |
|                                                                                    |                 | 10,9                                                                               | 13 700          |
|                                                                                    |                 | 11                                                                                 | 12 700          |

Ces deux plans ont été déterminés d'après les données fournies par la *figure 26* (relative au même tube). Ce sont ceux pour lesquels on atteint les nombres de Reynolds les plus élevés. Remarquons que leur intersection ( $d = 9,7 \text{ cm}$ ,  $h = 8,5 \text{ cm}$ ) ne correspond pas à la position d'équilibre du tube sans flexion, celle-ci a comme ordonnées  $d = 9,62 \text{ cm}$ ,  $h = 8,6 \text{ cm}$  (représentée par le point N).

### Conséquence importante de la courbure des tubes.

L'expérience montre ainsi que la courbure, même très faible, a un effet considérable sur le nombre critique d'un tube. Ceci est à rapprocher des résultats connus concernant la couche limite d'une plaque courbe ou d'un profil d'aile d'avion.

Dans un tube courbé on ne pourra donc jamais atteindre, en régime laminaire, de grandes valeurs du nombre de Reynolds.

On peut donner une idée de cette influence de la courbure aux grandes valeurs de  $R$  : un tube de verre de 0,2 à 0,3 mm de diamètre intérieur, de diamètre extérieur double, de 60 à 80 cm de long, bien encastré dans le réservoir à une extrémité, fléchit suffisamment sous son propre poids et celui de l'eau qu'il contient, pour laisser croire que le seul régime qui puisse s'y maintenir est le régime turbulent. Il suffit de redresser

légèrement le tube pour rétablir le mouvement laminaire (1). Il est intéressant de remarquer sur la *figure 26* qu'avec le tube laissé libre, sans flexion (position de l'extrémité A correspondant au point N), le régime devient turbulent pour  $R = 36\,000$  environ. Il est cependant possible de dépasser largement ce nombre, en redressant convenablement le tube, puisqu'on a facilement atteint  $R = 45\,000$  soit 25 % en plus.

Quand le tube fléchit, le changement de régime a lieu soit brusquement sans transition, soit par l'intermédiaire de saccades. Ces phénomènes sont d'ailleurs réversibles en ce sens que si l'on redresse le tube on reproduit les états d'écoulements précédents dans l'ordre inverse.

Si l'on veut donc obtenir le régime laminaire pour de très hautes valeurs du nombre de Reynolds, en dehors des précautions d'usage, il est indispensable d'avoir un tube parfaitement rectiligne. Cette influence de la courbure augmentant rapidement quand  $R$  augmente, il est fort probable que les expérimentateurs n'ont eu jusqu'à maintenant que des résultats limités ( $R \leq 50\,000$ ) à cause des faibles fléchissements, presque inévitables, des tubes utilisés qui avaient couramment plus de 1 m de longueur et n'étaient pas soutenus sur toute leur longueur par un support rigide (REYNOLDS [1], EKMAN [4]).

C'est en supprimant autant que possible ces déformations du tube que nous avons réussi, en régime laminaire, à atteindre, d'une manière stable et permanente, la valeur  $R = 70\,000$  (et certainement dépassé ce chiffre, mais sans faire de mesure).

## ÉCOULEMENT LAMINAIRE DANS UN TUBE LÉGÈREMENT CONIQUE

Dans un tube légèrement conique localement on peut admettre, en première approximation, qu'au bout d'une certaine longueur la répartition des vitesses est la même que dans un tube complètement conique.

L'étude expérimentale d'un tel écoulement de révolution étant très délicate, nous nous sommes limités à une étude théorique qui cependant nous donnera quelques résultats intéressants.

### a) ÉTUDE THÉORIQUE.

Nous allons montrer tout d'abord qu'un écoulement purement radial, analogue à celui qu'on admet dans le diffuseur plan, ne peut exister dans un divergent (voir aussi ROSENBLATT [23]).

Prenons un système de coordonnées polaires sphériques telles que (*fig. 28*) :

$$x = R \sin \theta \cos \Phi,$$

$$y = R \sin \theta \sin \Phi,$$

$$z = R \cos \theta.$$

Les équations du mouvement sont données par (voir : GOLDSTEIN, *Modern developments in Fluid dynamics*, vol. 1, § 41) :

---

(1) Et inversement si on relâche le tube, le régime turbulent se rétablit spontanément.

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{w}{R \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \Phi} - \frac{v^2 + w^2}{R} \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + v \left( \Delta u - \frac{2u}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2v}{R^2} \cotg \theta - \frac{2}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \Phi} \right);$$

$$(2) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{R} \frac{\partial v}{\partial R} + \frac{v}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R \sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \Phi} + \frac{uv}{R} - \frac{w^2}{R} - \frac{w^2}{R} \cotg \theta \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left( \Delta v + \frac{2}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{R^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial w}{\partial \Phi} \right);$$

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial R} + \frac{v}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{w}{R \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \Phi} + \frac{wu}{R} + \frac{vw}{R} \cotg \theta \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \Phi} + v \left( \Delta w - \frac{w}{R^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u}{\partial \Phi} + \frac{2 \cos \theta}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial v}{\partial \Phi} \right),$$

où :

$$\Delta \equiv \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left( R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{1}{R^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{R^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2},$$

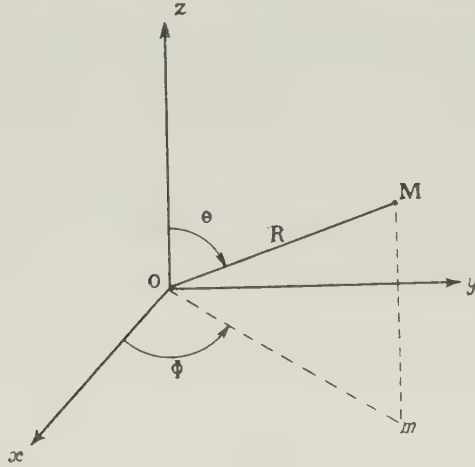


Fig. 28

et l'équation de continuité :

$$(4) \quad \text{div } \vec{V} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 u) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \Phi} = 0,$$

où  $u, v, w$  sont les composantes de la vitesse  $V$  suivant les directions  $R, \theta, \Phi$  :

1° Admettons que le mouvement soit symétrique autour de l'axe  $Oz$  du cône. Toutes les quantités doivent être indépendantes de  $\Phi$  ( $\frac{\partial}{\partial \Phi} = 0$ ). L'équation de continuité ne dépend plus de  $w$  :

$$(5) \quad \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 u) + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta) = 0.$$

Supposons d'abord que le mouvement soit radial ce qui entraîne  $w = 0$  et  $v = 0$ .  
L'équation de continuité devient :

$$(6) \quad \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R^2 u) = 0 \quad \text{donc} \quad R^2 u = F(\theta),$$

$F(\theta)$  étant fonction de  $\theta$  uniquement. Donc  $u = \frac{F(\theta)}{R^2}$ .

Les équations du mouvement se réduisent à (mouvement permanent) :

$$(7) \quad u \frac{\partial u}{\partial R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \nu \left( \Delta u - \frac{2u}{R^2} \right);$$

$$(8) \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{2\nu}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta};$$

avec :

$$(9) \quad \Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cotg \theta}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

Remplaçons  $u$  par sa valeur :

$$\frac{\partial u}{\partial R} = -\frac{2}{R^3} F, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} = \frac{6}{R^4} F, \quad \frac{\partial u}{\partial \theta} = \frac{F'}{R^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \frac{F''}{R^2}.$$

Les équations (7) et (8) donnent :

$$(10) \quad -\frac{2F^2}{R^5} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + \nu \left( \frac{F''}{R^4} + \frac{\cotg \theta}{R^4} F' \right);$$

$$(11) \quad \frac{1}{\rho} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{2\nu}{R^4} F'.$$

L'équation (11) intégrée une fois donne, à condition que  $F'$  soit différent de zéro :

$$\frac{1}{\rho} p = \frac{2\nu F}{R^3} + g(R),$$

$g(R)$  étant fonction de  $R$  seulement donc :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} = -\frac{6\nu}{R^4} F + g'(R).$$

Comparons cette dernière relation avec l'équation (10) :

$$(10') \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} = \frac{2F^2}{R^5} + \frac{\nu}{R^4} (F'' + \cotg \theta F').$$

On obtient simultanément :

$$\frac{R^5}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} = 2F^2 + \nu R (F'' + \cotg \theta F')$$

et :

$$\frac{R^5}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} = -6 \nu R F + R^5 g'(R);$$

F ne dépend que de  $\theta$ ,  $R^5 g'(R)$  ne dépend que de R, il faut donc que :

$$\begin{cases} 2 F^2 = R^5 g'(R) = C^{te}, \\ F'' + \cotg \theta F' = -6 F. \end{cases}$$

Système d'équations impossible à résoudre, sauf avec  $F(\theta) = 0$ .

Si on lève la restriction précédente, c'est-à-dire si  $F' = 0$  soit  $F = K$  (K étant une constante) :  $u = \frac{K}{R^2}$ .

Les équations (10) et (11) deviennent :

$$(12) \quad -\frac{2 F^2}{R^5} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R};$$

$$(13) \quad -\frac{1}{\rho} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad p = g(R), \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} = \frac{1}{\rho} g'(R) = \frac{2 K^2}{R^5};$$

d'où :

$$\frac{p}{\rho} = -\frac{K^2}{2 R^4} + C^{te};$$

donc :

$$\frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C^{te}.$$

C'est le mouvement d'un fluide parfait autour d'un puits sphérique. La vitesse  $u$  ne dépend que de R :  $u = \frac{K}{R^2}$ . Elle ne peut s'annuler qu'à l'infini et, par conséquent, cette solution ne peut convenir à l'écoulement, dans un convergent ou un divergent de révolution, car la vitesse doit nécessairement s'annuler sur les parois.

Le mouvement laminaire radial n'existe donc pas dans le cas étudié, il faut introduire une vitesse transversale  $v$  ou de rotation  $w$  ou peut-être les deux;

2° Admettons maintenant que le mouvement comporte une composante transversale  $v$  — à l'exception d'une composante de rotation  $w$ . — Autrement dit le mouvement a lieu dans des plans méridiens.

On serait peut-être tenté d'imaginer plutôt un mouvement du genre hélicoïdal, avec  $v = 0$ ,  $w \neq 0$ ; les lignes de courant seraient alors des espèces d'hélices tracées sur des cônes coaxiaux de sommet O. Ce mouvement rappellerait un peu ce qui se passe dans les tubes cylindriques courbés, bien que dans ce cas le mouvement hélicoïdal comporte les trois composantes de la vitesse et se divise en deux noyaux séparés, l'un dextrogyre, l'autre lévogyre. Ici il n'y a aucune raison, à cause de la symétrie de révolution imposée par les parois, de prendre un écoulement tournant dans un sens plutôt que dans l'autre (1).

(1) REMARQUE. — Si, par contre, la symétrie de révolution n'existe plus comme par exemple l'écoulement entre deux cônes circulaires de même sommet mais légèrement désaxés l'un par rapport à l'autre de sorte que l'ensemble présente un plan de symétrie, il est à peu près certain qu'une telle composante de rotation existe, lévogyre d'un côté du plan de symétrie, dextrogyre de l'autre, l'expérience montre en effet que l'écoulement se concentre dans la partie la plus large de l'espace annulaire existant entre les deux cônes.

Les équations du mouvement se mettent sous la forme :

$$(14) \quad u \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{v}{R} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial R} + v \left( \Delta u - \frac{2u}{R^2} - \frac{2}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{2v}{R^2} \cotg \theta \right);$$

$$(15) \quad u \frac{\partial v}{\partial R} + \frac{v}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{R} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial \theta} + v \left( \Delta v + \frac{2}{R^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{R^2 \sin^2 \theta} \right);$$

avec :

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cotg \theta}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

L'équation de continuité (5) est toujours valable, développons-la :

$$(16) \quad \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{2u}{R} + \frac{v}{R} \cotg \theta = 0.$$

P. SZYMANSKI [22] a étudié cet écoulement et a donné des formules fournissant  $u$ ,  $v$  et  $p$  (fig. 29).

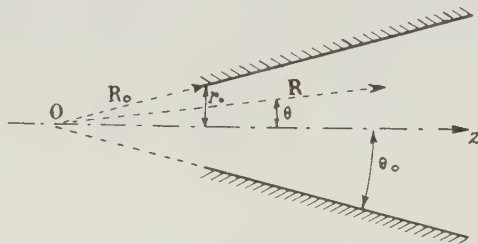


Fig. 29. — Écoulement conique

Ces formules se réduisent aux suivantes pour les petites valeurs de  $\theta$  :

$$(17) \quad \begin{aligned} u &= 2 U_0 \left( \frac{R_0}{R} \right) (1 - \xi^2) \left[ 1 + \frac{r_0 U_0}{9 v} \sin \theta_0 \left( \frac{R_0}{R} \right) (1 - 3,5 \xi^2 + \xi^4) \right], \\ v &= 0, \\ \frac{p - p_0}{\rho} &= \frac{8 v U_0}{3 r_0 \sin \theta} \left[ \left( \frac{R_0}{R} \right)^3 - 1 \right] - U_0^2 \left[ \left( \frac{R_0}{R} \right)^4 - 1 \right]. \end{aligned}$$

Où l'on a posé :

$$\xi = \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}.$$

$U_0$  désigne la vitesse moyenne à l'entrée du tuyau dont le rayon d'entrée est  $r_0$ ,  $R_0$  étant égal à  $\frac{r_0}{\sin \theta_0}$ .

La vitesse moyenne est définie par la relation :

$$Q = \pi r_0^2 U_0, \quad Q \text{ étant le débit,}$$

$p_0$  est la pression au centre de la section d'entrée. L'erreur commise sur ces expressions est de l'ordre de  $\sin^2 \theta_0$ .

De sorte que la vitesse  $v$  est au moins de cet ordre de grandeur et, en première approximation, on peut dire que les lignes de courant sont radiales.

Considérons l'expression (17), le coefficient de  $\frac{r_0 U_0}{9v} \sin \theta_0$  s'annule pour :

$$1 - 3,5 \xi^2 + \xi^4 = 0.$$

Soit pour :

$$\xi^2 = 3,182 \quad \text{et} \quad 0,317.$$

Ce qui donne ( $\xi \leq 1$ ) :

$$\xi_1 = 0,563.$$

Pour cette valeur de  $\xi$  la vitesse  $u$  est égale à :

$$u = 2 U_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 (1 - \xi_1^2) = 1,366 U_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2.$$

Donc :

$$\frac{u}{U_0} = 1,366 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2,$$

ou :

$$u = \frac{1,366 U_0 R_0^2}{R^2} = \frac{K}{R^2}.$$

Pour un débit  $Q$  donné, la vitesse le long de cette ligne de courant est indépendante de l'ouverture  $2 \theta_0$  (points P et P' de la *figure 30*).

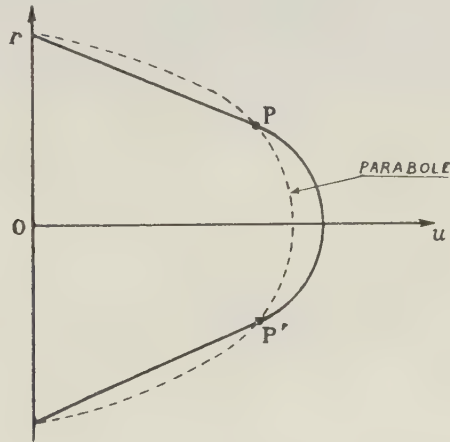


Fig. 30. — Profil des vitesses en écoulement divergent conique

Elle est en particulier la même que dans le cas de la représentation parabolique de Poiseuille ( $\theta_0 = 0$ ). La vitesse est de la forme  $u = \frac{K}{R^2}$ , comme dans le cas du mouvement d'un fluide parfait. De part et d'autre de cette ligne de courant, la répartition des vitesses s'éloigne de la répartition parabolique dans un sens et dans l'autre (*fig. 30*).

Quand  $R$  augmente et tend vers l'infini la vitesse  $u$  diminue, sa répartition tend vers la parabole :

$$u = 2 U_0 \left( \frac{R_0}{R} \right)^2 (1 - \xi^2).$$

Sur l'axe de révolution nous avons :

$$u = U_0 \left( \frac{R_0}{R} \right) \left[ 1 + \frac{r_0 U_0}{9 \nu} \sin \theta_0 \left( \frac{R_0}{R} \right) \right].$$

Cette discussion nous conduit donc à dire que la répartition des vitesses tout d'abord éloignée de la parabole s'en rapproche à mesure que  $R$  augmente.

Nous pouvons calculer la position pour laquelle  $u$  s'inverse par rapport au mouvement général. Il suffit que, dans l'expression (17), la quantité entre crochets devienne négative :

$$(18) \quad 1 + \frac{r_0 U_0}{9 \nu} \sin \theta_0 \left( \frac{R_0}{R} \right) (1 - 3,5 \xi^2 + \xi^4) \leq 0.$$

La fonction  $f(\xi) = 1 - 3,5 \xi^2 + \xi^4$  est décroissante dans l'intervalle :

$$0 \leq \xi \leq 1.$$

et sa valeur minimum dans cet intervalle est atteinte pour  $\xi = 1$  :

$$f(1) = -1,5.$$

L'inégalité (18) est donc vérifiée pour  $\xi = 1$ , si on a :

$$1 - \frac{r_0 U_0}{6 \nu} \sin \theta_0 \left( \frac{R_0}{R} \right) < 0.$$

Soit :

$$(19) \quad \frac{r_0 U_0}{\nu} \sin \theta_0 > \frac{6 R}{R_0}.$$

Cette condition sera vérifiée à l'entrée du canal conique, si on a (pour  $\frac{R}{R_0} = 1$ ) :

$$\frac{r_0 U_0}{\nu} \sin \theta_0 > 6.$$

Le mouvement se fera donc sans reflux tant qu'on aura, en introduisant le nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_0 = 2 \frac{r_0 U_0}{\nu}$  :

$$(20) \quad \mathcal{R}_0 \sin \theta_0 \leq 12.$$

Cette condition peut encore s'écrire, en introduisant le débit ( $Q = \pi r_0^2 U_0$ ) :

$$(21) \quad Q \leq 6 \pi \nu R_0.$$

Les expressions (20) et (21) sont équivalentes, la première donne une condition entre nombres sans dimensions. La seconde indique, que pour un  $\nu$  donné, le reflux ne se produit pas tant que le débit reste inférieur à une certaine valeur ( $Q_0 = 6 \pi \nu R_0$ , et ceci quelle que soit l'ouverture  $\theta_0$  du cône) (fig. 31).

Lorsque le reflux se produit, il prend naissance sur la paroi du cône et dès l'entrée ou pas du tout.

Cette condition (20) ou (21) doit servir de critérium pour déterminer l'apparition de la turbulence dans le tube car, *dès que le reflux se produit, l'écoulement n'est plus physiquement possible dans l'état laminaire.*

Comme l'angle doit être petit pour la justification des calculs effectués, la condition (20) s'écrit :

$$(20 \text{ bis}) \quad \mathcal{R}_0 \theta_0 \leq 12.$$

Cette expression est analogue à la condition imposée pour l'écoulement laminaire dans un canal divergent bidimensionnel et que nous étudierons plus loin.

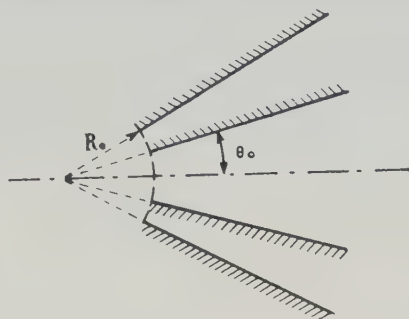


Fig. 31

#### b) CONCLUSION PRATIQUE.

D'après cette relation nous voyons qu'une faible conicité suffit pour provoquer les zones de reflux dans un écoulement laminaire et par suite la turbulence. Si le raisonnement s'applique dans le cas d'un tube circulaire d'abord cylindrique, puis présentant une partie légèrement divergente, il est facile de voir qu'il sera impossible d'y obtenir le régime laminaire aux grandes valeurs du nombre de Reynolds.

Ainsi, par exemple, pour obtenir  $\mathcal{R}_0 = 60\,000$ , il faut au moins que  $\theta_0$  soit inférieur à  $2 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = 40''$  d'arc ce qui est évidemment une valeur très faible. Sur un tube conique de 50 cm de long un tel angle correspond à une variation du rayon de 0,1 mm. Les tubes de verre du commerce présentent souvent de tels défauts.

### PHÉNOMÈNES D'AUTO-ENTRETIEN

#### a) PERTURBATIONS D'ORDRE SYSTÉMATIQUE :

Les perturbations que nous allons maintenant envisager se rattachent aux perturbations d'ordre mécanique par leur mode d'action.

Elles ne sont pas toutefois d'origine extérieure, puisqu'elles s'entretiennent d'elles-mêmes indéfiniment.

#### b) ÉTUDE EXPÉRIMENTALE.

L'expérience montre que le simple fait de mettre un point de la conduite en communication par un trou étroit avec un manomètre (pour faire une mesure de perte de charge par exemple) cela suffit, dans certaines conditions, à provoquer l'établissement du mouvement turbulent. La *figure 32* montre un tel dispositif, muni d'un manomètre en forme de U.

Soit  $h = hl$  la dénivellation du manomètre (avec  $\mathcal{R} > 2\,000$ ). Donnons un léger choc, soit au manomètre, soit au tube. La perturbation se traduit par une légère variation de  $h$ .

Si le choc est convenable, le régime change de nature : d'abord s'installe le régime de saccades, avec une fréquence de plus en plus grande, puis le régime turbulent. En même temps  $h$  augmente et se fixe à la valeur  $ht$  où le mouvement demeure turbulent. (Si  $R$  n'est pas assez grand, le mouvement reste saccadé ou reprend plus ou moins vite l'état laminaire.)

De plus, on peut vérifier, lorsque la turbulence est établie, que le régime est resté laminaire de O à T : il n'a changé qu'au delà de T (pendant la période transitoire

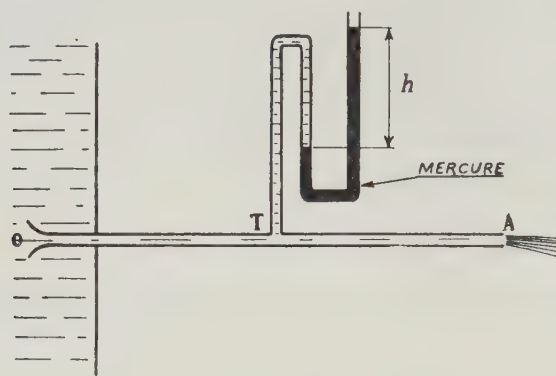


Fig. 32. — Dispositif expérimental

de saccades, ou lorsque le régime reste saccadé, il n'est pas absolument sûr qu'il en soit aussi de même, mais c'est très probable). Pour en faire la vérification, il suffit simplement de montrer que la perte de charge entre l'entrée O et le trou T est la même pour un même débit, que le régime en A soit laminaire ou non.

Si l'on considère la répartition des pressions dans le tube le long de OA nous avons,

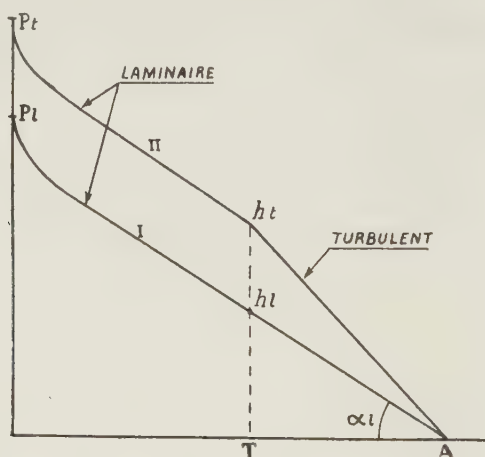


Fig. 33. — Répartition des pressions le long du tube

en régime laminaire, la courbe I, qui est dans sa majeure partie une droite de pente  $\alpha_l$  (fig. 33). Quand la turbulence apparaît en A, nous avons une autre répartition des pressions représentée par la courbe II. Pour un même débit, cette courbe est toute située au-dessus de la courbe I.

Si on vérifie que :

$$P_t - P_l = p_t - p_l,$$

$P$  étant la pression motrice régnant dans le réservoir,  $p$  étant la pression donnée au niveau du trou  $T$ , par le manomètre.

On pourra dire que les deux courbes  $P_t M p_t$  et  $P_l N p_l$  se déduisent l'une de l'autre par translation et, par suite, que de  $O$  à  $T$  le régime est resté laminaire dans les deux

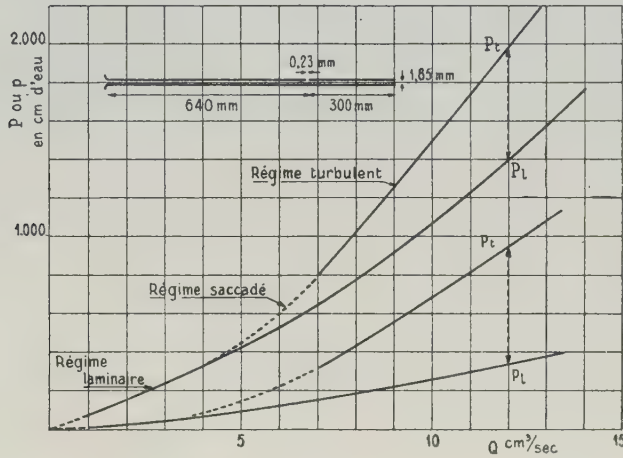


Fig. 34

écoulements. C'est ce que montre l'expérience traduite par les courbes de la *figure 35* qui représentent  $P_t - P_l$  et  $p_t - p_l$  en fonction de  $Q$ . Ces deux courbes sont sensiblement confondues.

La *figure 34* donne les valeurs de  $P$  et  $p$  en fonction de  $Q$  tirées du tableau de

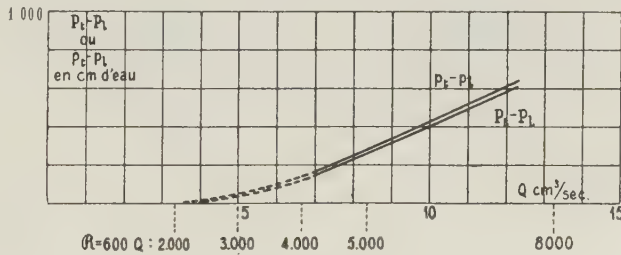


Fig. 35

mesures suivant. Par différence on a déduit les quantités  $P_t - P_l$  et  $p_t - p_l$  de la *figure 35*.

$P$  et  $p$  sont en cm d'eau,

$Q$  est exprimé en  $\text{cm}^3/\text{sec}$  :

$$\theta^\circ = 15^\circ, \quad R = \frac{VD}{\nu} = 688 Q.$$

Le trou  $T$  a un diamètre d'environ 0,023 cm.

Tableau de mesures.

| RÉGIME LAMINAIRE |       |      | RÉGIME DE SACCADÉS |     |     | RÉGIME TURBULENT |       |      |
|------------------|-------|------|--------------------|-----|-----|------------------|-------|------|
| $P_l$            | $p_l$ | Q    | P                  | p   | Q   | $P_l$            | $p_l$ | Q    |
| 75               | 6,3   | 0,8  | 335                | 95  | 4   | 800              | 324   | 7,1  |
| 250              | 62    | 3,2  | 400                | 132 | 4,4 | 900              | 370   | 7,4  |
| 360              | 90    | 4,2  | 440                | 150 | 4,7 | 1 000            | 425   | 7,9  |
| 500              | 127   | 5,7  | 500                | 173 | 5,2 | 1 100            | 490   | 8,3  |
| 660              | 173   | 7,1  | 600                | 218 | 6   | 1 300            | 605   | 9,2  |
| 700              | 175   | 7,4  | 700                | 276 | 6,5 | 1 520            | 722   | 10,1 |
| 900              | 226   | 8,9  |                    |     |     | 1 630            | 785   | 10,6 |
| 1 100            | 274   | 10,2 |                    |     |     | 1 800            | 885   | 11,5 |
| 1 300            | 316   | 11,4 |                    |     |     | 2 000            | 915   | 11,9 |
| 1 600            | 390   | 13,1 |                    |     |     |                  |       |      |

Les mêmes phénomènes peuvent se produire si, partant de l'état laminaire dans le tube avec  $R > 2\,000$ , l'on agite légèrement l'eau du réservoir ou bien l'on produit une brusque variation de débit (obturation partielle de l'extrémité A du tube). Une perturbation quelconque, provoquée ou non, est enregistrée par le manomètre. Si elle est suffisante, le changement de régime se produit. Si elle est insuffisante, la dénivellation  $h$ , après une faible variation inférieure à un certain seuil  $\Delta h$ , reprend sa valeur primitive  $h_l$ . En utilisant un manchon de verre au lieu de métal, il est possible d'observer le comportement d'une petite bulle d'air maintenue au voisinage du trou (fig. 36).

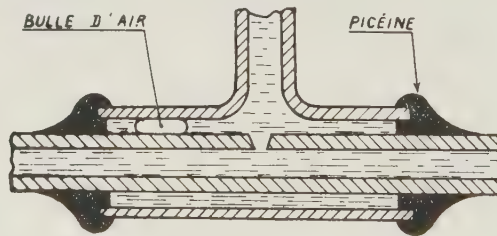


Fig. 36. — Tube et son manchon de verre

Cette bulle n'oscille pas quand l'état laminaire existe de O à A. Elle n'oscille pas non plus apparemment quand c'est le régime turbulent qui existe dans tout le tube, régime obtenu en provoquant continuellement des perturbations convenables à l'entrée O du tube (à l'aide d'une petite plaque métallique amenée au voisinage du pavillon, selon la méthode de Schiller). Par contre, elle oscille continuellement, et de plus en plus vite, quand  $h$  croît de  $h_l$  à  $h_t$ , lors des phénomènes précédemment décrits. On doit donc admettre qu'en T existent de rapides variations de pression qui se traduisent par des entrées et sorties de liquide par le trou. La perturbation s'entretient ainsi automatiquement. Suivant les caractéristiques du trou, du manomètre, etc., les sorties d'eau successives seront au total plus ou moins importantes que les rentrées d'eau. Dans le premier cas,  $h$  continuera de croître jusqu'à  $h_t$ ; dans le deuxième,  $h$  reprendra sa valeur

primitive  $h_i$  et le régime redeviendra laminaire. Le cas intermédiaire se traduira par un régime de saccades plus ou moins prolongé (1).

De tout ceci, il est important de constater que la perturbation se localise en T alors qu'initialement elle ne l'était pas, et le régime n'est turbulent qu'en aval de T. Les mêmes phénomènes se reproduisent si l'on remplace le manomètre ou la bulle d'air par un système élastique quelconque, manchon de caoutchouc, capsule manométrique, etc. Si la conduite comporte deux systèmes élastiques, deux manomètres, par exemple, la turbulence peut apparaître soit au niveau de l'un, soit au niveau de l'autre. Si elle se produit d'abord au niveau du trou aval, elle peut remonter le tube et prendre naissance plus tôt, au niveau du trou amont.

Une fois atteinte la turbulence à l'aval du trou T, on peut d'ailleurs très facilement y rétablir le régime laminaire, il suffit simplement de couper la communication avec le manomètre ou de ramener la dénivellation  $h$  du manomètre de  $h_t$  à  $h_i$  ou à une valeur voisine de  $h_i$ . On peut, par exemple, ramener  $h_t$  jusqu'à  $h_i$  en modifiant les caractéristiques du manomètre : étranglement du tube de communication avec T, ce qui a pour effet de modifier le rapport des débits entrée et sortie d'eau lors des oscillations. L'auto-entretien des perturbations cesse et, par suite, la cause provoquant la turbulence : dans le tube règne à nouveau l'état laminaire. Il est très curieux de constater combien il est ainsi facile de passer à volonté d'un régime à l'autre en modifiant simplement les caractéristiques du système branché sur le trou T.

#### c) CONSÉQUENCE PRATIQUE IMPORTANTE.

Lorsqu'on veut déterminer l'état d'écoulement dans un tronçon de tube, en mesurant la perte de charge entre les extrémités de ce tronçon, la moindre perturbation peut s'y entretenir grâce à l'élasticité présentée par les appareils de mesure. La turbulence s'installe donc dans le tronçon et à l'aval de celui-ci. C'est probablement ce phénomène qui longtemps laissa croire à l'instabilité du régime laminaire, car, pour rétablir ce régime, il était alors nécessaire de réduire considérablement la vitesse d'écoulement, jusqu'aux environs de  $R = 2\,000$ .

Ainsi, par exemple, dans le cas du tube qui nous a permis de tracer les courbes des figures 34 et 35, même en prenant de grandes précautions pour augmenter très progressivement la pression dans le réservoir, la turbulence apparaît toujours aux environs de  $R = 7\,200$ . Il n'est pas possible, avec le manomètre utilisé, branché sur le trou T, de dépasser ce nombre. Or, des expériences précédentes faites avec le même tube, mais non percé, nous ont permis d'atteindre  $R = 24\,000$ .

Il est donc essentiel de savoir que tout système présentant une certaine élasticité (en particulier la plupart des appareils de mesure), et placé sur la conduite, est capable d'entretenir le mouvement turbulent à la suite d'une perturbation fortuite; sans la présence de ce système élastique le mouvement retournerait spontanément à l'état laminaire.

---

(1) Si l'on utilise un tube troué simplement, et si le nombre de Reynolds de l'écoulement n'est pas trop grand, on peut obtenir le régime laminaire que le trou soit bouché ou qu'il soit ouvert (créant ainsi une fuite). Mais si, pour ce même nombre de Reynolds, on recouvre le trou d'un manchon en caoutchouc souple, le régime devient turbulent. Il en est de même si l'on pose le doigt sur le trou en n'appuyant pas trop fort (on sent nettement les variations de pression). La turbulence disparaît si l'on ferme ou ouvre complètement le trou. Ces expériences montrent bien qu'une simple fuite ne suffit pas toujours à provoquer la turbulence et il s'agit bien ici d'un phénomène oscillatoire.

## ÉTUDE PARTICULIÈRE DES VARIATIONS DE PRESSION LORS DE L'AUTO-ENTRETIEN — MANOMÈTRE A BULLE D'AIR

Il serait intéressant de connaître la forme et les valeurs des variations de pression qui se produisent au niveau du trou T lors des phénomènes d'auto-entretien que nous venons de décrire. Le manomètre en U a une trop grande inertie pour fournir une indication. A peine voit-on la surface du ménisque vibrer. Il faut donc un appareil sensible aux variations rapides de la pression. En raison de son élasticité propre un tel appareil doit modifier les fluctuations de pression. Cela n'a pas d'importance si l'on s'arrange justement pour qu'il soit à la fois producteur de perturbation et enregistreur de pression.

En outre il est nécessaire qu'un tel manomètre enregistreur soit « de très faible consommation » car les débits à travers le trou (qui est très petit) sont très faibles.

Il n'existait pas d'instrument de mesure qui puisse répondre à tant de conditions : les manomètres à liquide ont trop d'inertie et les appareils à membrane élastique ou à quartz présentent d'autres inconvénients.

Or, l'observation des variations de volume d'une bulle d'air sous l'action des variations de pression se produisant au niveau du trou T, nous a donné l'idée d'utiliser cette bulle à la fois pour produire l'auto-entretien et pour effectuer les mesures de pression.

La grande difficulté résidait dans la mesure instantanée de ce volume. Repérer avec précision la position d'un ménisque dans un tube de verre est une opération délicate, surtout si le ménisque n'est pas absolument fixe comme c'est le cas. Les procédés couramment utilisés, fondés sur des visées optiques, ne peuvent convenir car la mesure n'est pas instantanée.

### **Manomètre à bulle d'air (physalimanomètre).**

Nous avons essayé d'appliquer une nouvelle méthode qui a donné toutes satisfactions. En voici le principe :

— lorsqu'un liquide mouillant remplit partiellement un tube de petit diamètre, une couche mince de liquide recouvre les parois du tube au voisinage du ménisque. Cette couche a une épaisseur de l'ordre du micron et sa résistance électrique est élevée, même lorsque le liquide est un électrolyte.

Dès lors, si le ménisque est contenu dans un tube isolant et que l'on utilise deux électrodes traversant le tube et situées de part et d'autre du ménisque, tout déplacement du ménisque entraîne une variation de la résistance électrique comprise entre les deux électrodes.

La détermination de cette résistance permet de repérer la position du ménisque et d'en suivre les déplacements. C'est sur cette remarque qu'a été réalisé le nouveau manomètre (Planche III, *fig. F*).

En se référant à la *figure 37*, on voit que le dispositif comporte un tube isolant, par exemple un tube de verre T, fermé à l'une de ses extrémités et contenant un électrolyte E dans lequel a été ménagée une bulle gazeuse B (1). L'extrémité ouverte du tube est en contact avec le gaz dont la pression variable est à mesurer. Deux électrodes M et N permettent de déterminer la résistance de la colonne liquide renfermant la bulle. Toute variation de pression entraîne une variation de volume de la bulle, donc un dépla-

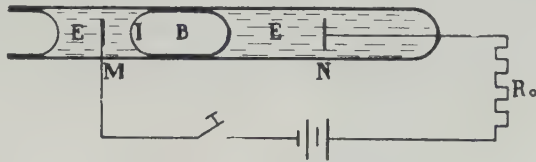


Fig. 37. — Physalimanomètre

cement du ménisque I. Par suite, il se produit une variation de longueur de la couche d'électrolyte tapissant les parois entre les ménisques limitant la bulle. La résistance électrique R, entre les électrodes M et N, sera donc modifiée par toute variation de pression s'exerçant sur le ménisque. On peut augmenter la sensibilité du dispositif, en le réalisant comme il est indiqué sur la *figure 38*. On dispose la bulle gazeuse B et

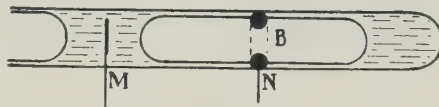


Fig. 38

les électrodes M et N de telle sorte qu'une des électrodes N, réalisée par exemple par un anneau circulaire, se trouve à l'intérieur de la bulle B, tandis que l'autre électrode M baigne dans l'électrolyte.

Un dispositif électrique, bien connu en soi, analogue par exemple à l'un de ceux qu'utilisent les appareils de mesure à fil résistant (strain gauge), permet de transformer les variations de R en variations de courant ou de tension, facilement enregistrables, soit au galvanomètre, soit à l'oscillographe cathodique ou magnétique. Les appareils pourront, si on le désire, être gradués en variations de pression.

La *figure 37* montre à titre d'exemple un montage possible que nous avons fréquemment utilisé. La résistance manométrique R est reliée, par l'intermédiaire d'une résistance fixe  $R_0$ , aux bornes d'une batterie d'accumulateurs ou d'une pile de quelques volts. Les variations de R créent des variations d'intensité, donc de tension aux bornes de  $R_0$  (ou de R). Ces variations de tension sont observées à l'oscillographe cathodique.

(1) Si la bulle est cylindrique et son diamètre  $d$  petit, elle peut, dans certaines conditions, ne pas se déplacer à l'intérieur du tube. En effet, la vitesse d'ascension de la bulle s'annule pour une valeur finie du diamètre  $d$ , diamètre critique donné par [refer. 36] :

$$d = 1,295 \sqrt{\frac{2\alpha}{\rho g}}$$

$\alpha$  est la tension superficielle du liquide (en dyne/cm);  
 $\rho$  est sa densité,  $g$  est l'accélération de la pesanteur en  $\text{cm/sec}^2$ .



Pour éviter les effets thermiques et les dépôts électrolytiques qui perturberaient les mesures, il convient de n'utiliser, dans la résistance R, que des courants de très faibles intensités. On évitera de même les effets de polarisation, en prenant comme métal pour les électrodes le même métal que celui qui constitue le cathion de l'électrolyte. Par exemple, les électrodes de cuivre dans une solution de sulfate de cuivre.

Pour supprimer les effets de polarisation, on peut également faire les mesures de R en courant alternatif. Enfin, pour éviter les oscillations propres du système, on peut calculer l'appareil de façon à réaliser les conditions optima d'amortissement. (Voir l'étude mathématique du manomètre en Annexe III.)

### *Exemples.*

On peut mentionner à titre indicatif que l'on a pu enregistrer, très facilement, à l'oscillographe cathodique, des variations de pression de l'ordre de 1 mm d'eau, autour de la pression atmosphérique et pour des variations de pression dont la fréquence était comprise entre 0 et 50 périodes par seconde.

Les appareils utilisés présentaient les caractéristiques suivantes :

- tube en verre de diamètre intérieur 0,5 mm à 3 mm;
- longueur du tube : 20 à 50 mm;
- électrolyte : solution de  $\text{SO}^4\text{Cu}$ ;
- résistance R variant de  $10^3$  à  $10^6$  ohms suivant la longueur de la bulle.

La fréquence propre de résonance était évidemment variable suivant la longueur de la bulle et celle du cylindre d'électrolyte mobile.

### **Dispositif particulier de mesure.**

Sans nous étendre davantage sur les dispositifs électriques susceptibles d'être utilisés dans le cas présent, il est intéressant de noter un montage dans lequel le courant électrique qui traverse la bulle est directement proportionnel à la pression à mesurer.

Si l'on considère comme isothermes les variations du volume de la bulle, nous avons la relation :

$$(1) \quad pv = rT,$$

$r$  étant la constante des gaz parfaits relative à la masse de gaz utilisé,  $T$  la température absolue.

D'autre part si, comme on peut le faire en général, on peut assimiler la résistance du circuit à la seule résistance R de la couche capillaire, nous avons :

$$(2) \quad E = Ri,$$

E est la tension d'alimentation, constante, appliquée aux électrodes M et N (tension continue ou alternative).

PLANCHE III

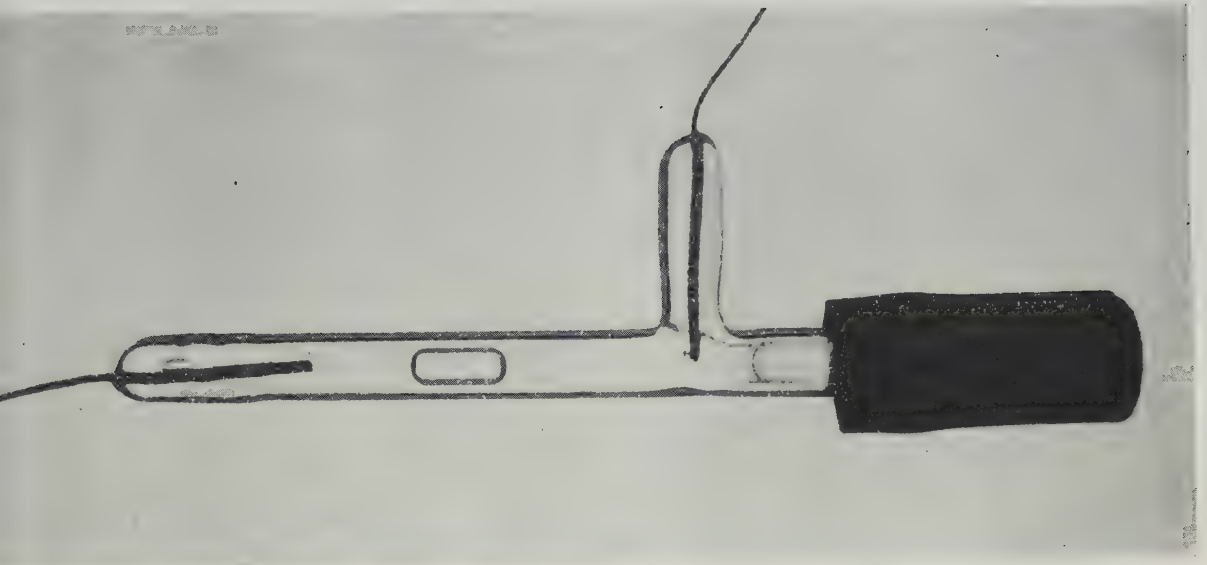


Fig. F. — Micromanomètre à bulle d'air

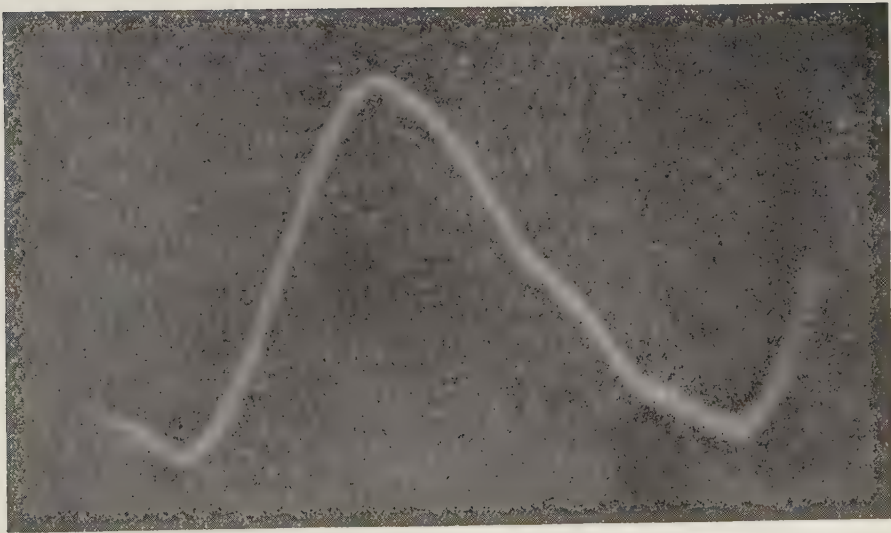


Fig. G. — Enregistrement de pression au micromanomètre, régime de saccades

Les égalités (1) et (2) nous donnent :

$$(3) \quad \frac{i}{p} = \frac{E}{rT} \times \frac{v}{R}.$$

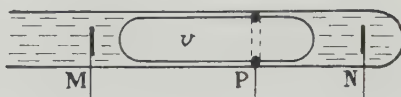


Fig. 39

Si la bulle est cylindrique,  $R$  est proportionnel à  $v$ . En effet, en appelant :

$d$  le diamètre intérieur du tube;

$\varepsilon$  l'épaisseur de la couche capillaire;

$\rho$  la résistivité de l'électrolyte en couche capillaire;

$l$  la longueur de la bulle;

$$R = \frac{\varepsilon l}{S} = \frac{\rho l}{\pi d \varepsilon}, \quad v = \pi \frac{d^2}{4} l,$$

$$\frac{v}{R} = \frac{\pi \frac{d^2}{4} l}{\frac{\rho l}{\pi d \varepsilon}} = \frac{\pi^2 d^3 \varepsilon}{4 \rho};$$

l'égalité (3) donne

$$\frac{i}{p} = \frac{E}{rT} \frac{\pi^2 d^3 \varepsilon}{4 \rho} = K = C^{te},$$

$$(4) \quad i = Kp.$$

Le courant  $i$  est proportionnel à  $p$  quel que soit  $p$ .

La caractéristique  $i = f(p)$  est une droite passant par l'origine (fig. 40).

Le même appareil pourra servir dans un grand intervalle de pressions (tant que les phénomènes de dissolution du gaz dans l'électrolyte resteront négligeables).

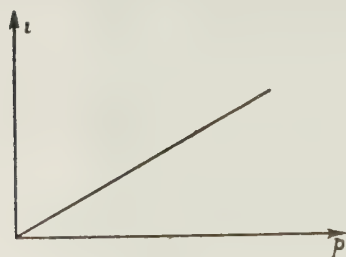


Fig. 40

Le coefficient  $K$ , de la formule (4), dépend de la température par l'intermédiaire de  $T$ ,  $\rho$  et peut-être aussi  $\varepsilon$ . Or, en général, pour les électrolytes, la résistivité décroît quand la température augmente, on doit donc, par un choix judicieux de l'électrolyte, pouvoir réaliser un appareil dont les indications soient indépendantes de la température (du moins dans un certain domaine de températures) (1).

La mesure de la pression s'opère :

1° soit en intercalant un galvanomètre de faible résistance devant  $R$  en série dans le circuit;

(1) Il faut aussi tenir compte du phénomène de déplacement des ions quand le courant passe, ce qui produit en courant continu, une lente variation de  $R$  quand l'appareil fonctionne (analogue à un déplacement du zéro).

2° soit en mesurant les variations de tension aux bornes de la résistance  $R_0$  petite devant  $R$  (*fig. 37*), ou entre l'électrode  $N$  et une électrode intermédiaire  $P$  située sur la couche capillaire à l'aide d'un instrument à consommation nulle (oscillographe cathodique) (*fig. 39*).

Pour bien savoir à quoi correspondent les indications données par ce manomètre, il faut en déterminer la courbe de réponse en fonction de la fréquence. L'équation différentielle qui donne le mouvement du ménisque sous l'action des variations de pression appliquée est du deuxième ordre comme il est bien connu, mais le cas se complique ici du fait que ses coefficients ne sont pas constants et dépendent de la fréquence.

Une étude complète permet cependant de montrer que la courbe de réponse d'un tel système élastique est plus favorable aux mesures que dans le cas ordinaire. (Voir Annexe III.)

### Conclusions.

Ce manomètre permet donc d'enregistrer facilement les fluctuations de pression existant en un point. Sa « consommation » est extrêmement faible, d'autant plus que les dimensions de la bulle sont plus petites.

Il nous a permis de vérifier avec précision les indications données au sujet des variations de pression régnant au niveau d'un trou percé dans le tube. Nous avons pu constater en particulier que ces variations de pression, lorsque le régime est saccadé, présentent un aspect analogue à celui d'oscillations de relaxation, de plus en plus rapides, à mesure qu'on se rapproche du régime turbulent (Planche III, *fig. G*).

---



## TROISIÈME PARTIE

---

# ÉCOULEMENT DANS LES CONDUITES BIDIMENSIONNELLES

---

### GÉNÉRALITÉS

Nous avons vu que la possibilité d'obtenir le régime laminaire aux grandes valeurs de  $\mathcal{R}$  dépendait étroitement de la forme géométrique de la canalisation. Dès que se produit une déviation des lignes de courant équivalant à une divergence ou une courbure de l'écoulement, il existe une valeur de  $\mathcal{R}$  au delà de laquelle l'écoulement laminaire ne peut plus exister.

Or, il est impossible de réaliser une canalisation parfaitement rectiligne, il subsistera toujours quelques imperfections dans une conduite réelle. Dans certaines zones de la conduite les lignes de courant seront donc plus ou moins déviées.

*En aval* de ces zones, dès qu'une certaine valeur de  $\mathcal{R}$  est atteinte, il se formera un écoulement non permanent qui est à l'origine de perturbations. Si l'écoulement laminaire est instable, il se transformera en écoulement turbulent.

Dans le but de confirmer cette hypothèse, nous avons entrepris de nouvelles expériences.

Les écoulements du type précédent étant difficilement abordables par le calcul, nous avons simplifié le problème en étudiant des conduites à deux dimensions.

### RAPPEL DES TRAVAUX ANTÉRIEURS

L'écoulement laminaire dans un diffuseur constitué par deux parois planes parallèles a fait l'objet de nombreux travaux théoriques. Dans les calculs on suppose que l'écoulement est radial, c'est-à-dire que les lignes de courant dans la section droite du diffuseur sont les rayons issus du point O de rencontre des parois (*fig. 41*).

Ce problème a fait notamment l'objet de recherches de la part de JEFFERY [24], HAMEL [25], ABRAMOWITZ [26], etc.

Des renseignements bibliographiques complets figurent dans le *Modern Developments in fluid Dynamics*, de GOLDSTEIN [27], ou dans le *Handbuch des Experimentalphysik*, de TOLLMIEH [28].

Pour un tel écoulement, on peut trouver une solution exacte des équations de Navier-Stokes, en voici les principaux résultats :

— soient  $r$  le rayon = OM (fig. 41) et  $\alpha$  le demi-angle d'ouverture du dièdre. Aux faibles nombres de Reynolds la répartition des vitesses est approximativement parabolique. Quand la vitesse augmente, l'écoulement se concentre de plus en plus dans la

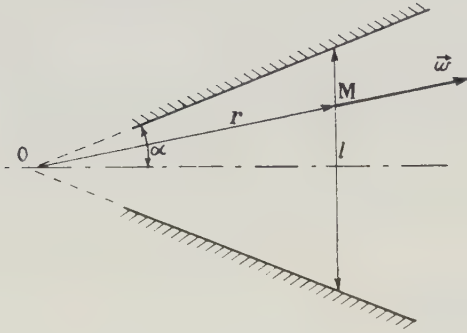


Fig. 41. — Écoulement radial

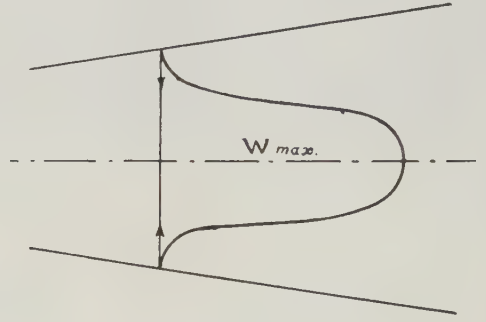


Fig. 42

région médiane du canal jusqu'à ce que la répartition des vitesses parte normalement à la paroi (fig. 42).

Pour une vitesse supérieure, l'écoulement purement divergent devient impossible car il se produit des zones de reflux. Cette vitesse critique est liée à l'angle  $\alpha$  par la relation :

$$\alpha \sqrt{\mathcal{R}_M + 3} = \sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{\mathcal{R}_M}\right)^{-1} \sin^2 \psi}};$$

avec :

$$\mathcal{R}_M = \frac{w_{\max} \cdot r}{\nu},$$

$w_{\max}$  étant la vitesse maximum, atteinte dans le plan de symétrie. Lorsque  $\mathcal{R}_M$  est grand, par exemple  $\mathcal{R}_M > 200$  ou 300, cette relation s'exprime sensiblement par :

$$(1) \quad \alpha \sqrt{\mathcal{R}_M} = 3,211 \quad (\text{réf. 27, p. 108}).$$

Comme l'angle  $\alpha$  est supposé petit, la distance  $e$  entre les parois peut s'écrire :

$$e = 2 \alpha r.$$

Introduisons dans la formule (1) le nombre de Reynolds formé avec  $e$  <sup>(1)</sup> :

$$\mathcal{R}_m = \frac{w_{\max} \cdot e}{\nu};$$

(1) Les nombres de Reynolds formés avec la vitesse maximum seront affectés de l'indice  $m$ , ceux qui seront formés avec la vitesse moyenne n'auront pas cet indice.

L'indice  $o$  affectera les quantités correspondant à l'entrée du diffuseur (partie rectiligne).

il vient :

$$\alpha^2 \frac{w_{\max} r}{\nu} = 10,3;$$

soit :

$$2 \alpha \cdot \frac{w_{\max} e}{\nu} = 41,2$$

ou :

(1')

$$\mathcal{R}_m \times 2 \alpha = 41,2$$

Même si  $\alpha$  est très petit il est facile de voir qu'on ne pourra obtenir l'écoulement laminaire aux grandes vitesses.

Dans le cas d'un diffuseur de révolution nous avons trouvé une expression de la même forme. Les conclusions étaient analogues (voir page 51, formule 20 bis).

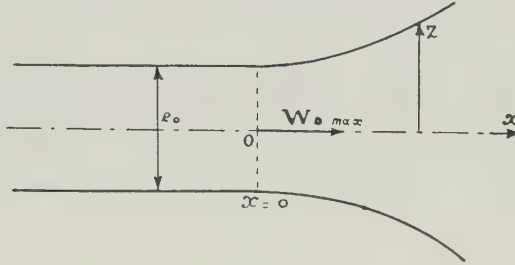


Fig. 43. — Conduite divergente

En 1910, par une méthode d'approximation, BLASIUS [29] avait étudié l'écoulement dans un diffuseur bidimensionnel dont les parois, raccordées à deux plans parallèles, s'évasaient ensuite légèrement (fig. 43).

Dans ces conditions en supposant la répartition des vitesses parabolique entre les deux plans distants de  $e_0$ , la condition critique s'écrit :

$$(2) \quad \mathcal{R}_0 \frac{dz}{dx} = 17,5 \quad \text{avec} \quad \mathcal{R}_0 = \frac{w e_0}{\nu};$$

$w = \frac{2}{3} w_{\max}$  étant la vitesse moyenne entre les deux plans, dans la partie rectiligne.

Pour un diffuseur ordinaire, en forme de dièdre, il suffit de faire :

$$\frac{dz}{dx} = C^{\text{te}} = \alpha.$$

En 1949, ABRAMOWITZ [26] a repris les calculs de Blasius, mais en poussant plus loin l'approximation. Ses calculs, effectués dans le cas d'un diffuseur dièdre, conduisent à remplacer l'expression (2) par :

$$(3) \quad \mathcal{R}_0 \alpha = 12,33 \text{ (au lieu de 17,5).}$$

Par ailleurs, le calcul de Blasius ne donnait pas la position, dans la canalisation, du point où l'écoulement commence à refluer. ABRAMOWITZ expose une méthode qui permet de la calculer en fonction de  $R$  et de  $\alpha$ .

Le seul travail expérimental qui semble avoir été effectué sur un tel écoulement laminaire divergent est dû à PATTERSON [30], dans le cas d'une conduite d'air de petite divergence exponentielle, et aux très faibles nombres de Reynolds :

$$R_0 \leq 75.$$

Patterson trouvait d'ailleurs que l'écoulement selon la forme prévue par BLASIUS ne se produisait que dans un intervalle étroit du nombre de Reynolds :

$$25 \leq R_0 \leq 36.$$

L'expérience lui donnait comme valeur critique :

$$(4) \quad R_0 \frac{dz}{dx} = 6,$$

c'est environ la moitié de la valeur que calculera plus tard ABRAMOWITZ. Il faut cependant remarquer avec l'auteur que les conditions pour lesquelles l'expression (4) a été établie ne correspondent plus à l'hypothèse  $\frac{dz}{dx}$  petit, supposée dans la théorie de Blasius ou d'Abramowitz.

Qu'il y ait un écart, cela n'a rien d'étonnant.

Nous avons donc repris l'étude de l'écoulement laminaire dans une conduite légèrement divergente, mais en forme de dièdre, avec  $\alpha$  constant. Auparavant, il est évidemment indispensable de savoir réaliser un écoulement parfaitement laminaire dans une conduite bidimensionnelle d'angle d'ouverture nul (section constante). On fera ensuite varier l'angle.

C'est ce que nous avons essayé de faire, d'abord sans résultat avec deux plans parallèles, puis avec succès avec deux cylindres coaxiaux voisins.

## ÉCOULEMENT BIDIMENSIONNEL PLAN

### Réalisation d'un canal bidimensionnel plan (Planche II, fig. I).

Nous avons constitué le canal avec deux lames de verre épaisses présentant chacune une face plane travaillée optiquement à 1 micron près.

Les deux faces planes, mises en regard l'une de l'autre, sont séparées par deux cales d'épaisseur découpées dans du clinquant d'acier et collées au verre par une colle spéciale pour verre. On réalise ainsi une conduite prismatique de section rectangulaire très aplatie.

Chaque lame a la forme d'un demi-cylindre circulaire munie d'un épaulement du côté amont.

L'aspect extérieur de ce dispositif est très voisin d'un cylindre circulaire muni d'une base carrée (*fig. 44*).

Après avoir collé les deux lames de verre, on les maintient solidement à l'aide d'une bague métallique, munie de deux vis de serrage, pendant 24 h ou 48 h pour laisser sécher la colle.

L'ensemble est ensuite introduit dans une pièce métallique P, munie d'un presse-étoupe pour réaliser l'étanchéité. Cette pièce P est analogue à celle que nous avons utilisée pour maintenir les tubes de verre de nos précédentes expériences. Elle se visse

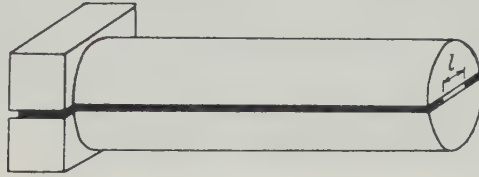


Fig. 44. — Conduite bidimensionnelle plane

sur le même réservoir d'eau. Cette façon d'opérer permet de modifier l'épaisseur du canal, du moins dans une certaine mesure, tant que la section du cylindre formé par les deux lames et ses cales ne s'éloigne pas trop du cercle.

Un peu de colle s'introduit toujours dans le canal lors du serrage. Il faut l'enlever avec une mince lame de clinquant avant qu'elle ne sèche, car sa consistance, toujours un peu élastique, empêcherait de s'en débarrasser facilement plus tard.

De cette façon nous réalisons un canal plan, bidimensionnel, si les cales d'épaisseur sont bien disposées, et parfaitement lisse, ce qui est essentiel étant donnée l'épaisseur de ce canal dont voici les dimensions :

- longueur : 59 mm;
- largeur de 6 à 10 mm;
- épaisseur de 0,2 à 0,4 mm.

L'épaisseur du canal est contrôlée au microscope avant chaque expérience.

On peut vérifier optiquement rapidement l'égalité d'épaisseur des deux cales en regardant, par réflexion sur les faces planes du canal, les deux images d'un objet rectiligne fournies par chaque face.

Pour un canal à parois parallèles, bidimensionnel, le nombre de Reynolds de l'écoulement a été formé à partir de l'épaisseur  $e$  du canal, de largeur  $l$  :

$$R = \frac{we}{\nu},$$

$w$  = vitesse moyenne d'écoulement.

Or le débit  $Q$  est :

$$Q = elw.$$

D'où :

$$R = \frac{Q}{l\nu}.$$

Le nombre de Reynolds ne dépend donc pas de l'épaisseur  $e$  du canal pour une même largeur.

Pour un canal donné nous déterminons  $R$  par la mesure de  $Q$ , et de la température  $\theta_0$  de l'eau et le régime d'écoulement par son aspect à la sortie du canal.

#### REMARQUE.

Un premier dispositif, tout à fait analogue à celui que nous venons de décrire, avait d'abord été réalisé en plexiglass, au lieu de verre.

Un certain nombre de mesures avaient été faites avec ce dispositif et c'est devant l'impossibilité d'obtenir le régime laminaire pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds que nous avons utilisé le verre. Nous pensions, en effet, que le plexiglass ne présentait pas une surface plane aussi lisse que le verre travaillé et surtout qu'il se déformait sous l'effet de la pression.

Nous verrons que nos craintes n'étaient pas justifiées et les résultats avec le verre furent analogues à ceux qu'avait fournis le plexiglass.

### Résultats expérimentaux.

#### a) ASPECT DE LA NAPPE LIQUIDE A LA SORTIE DE LA CONDUITE (Planche IV, fig. III).

Par une augmentation progressive de la pression d'air comprimé dans le réservoir, on fait croître régulièrement le débit liquide, donc  $R$ .

Quand le débit augmente à partir de 0, l'écoulement à la sortie du canal présente successivement les aspects suivants (fig. 45) :

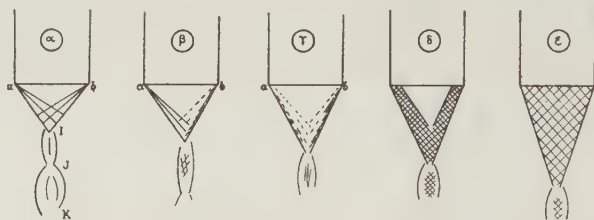


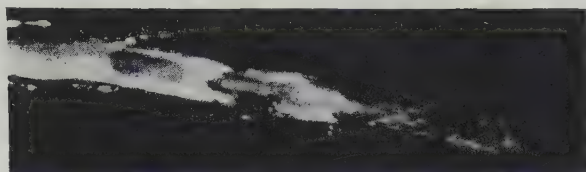
Fig. 45. — Aspects successifs de la nappe plane liquide

Tant que le nombre de Reynolds est petit, l'aspect est celui de la figure 45,  $\alpha$ , la lame liquide transparente a la forme triangulaire mais traversée par une série de rides rectilignes divergentes, issues des bords  $a$  et  $b$ . Au sommet  $I$  du triangle, le jet forme une lame  $IJ$  orientée perpendiculairement au plan  $Iab$ , puis une deuxième lame  $JK$  dans le même plan que  $Iab$ , etc.

Cet aspect caractéristique s'explique par les phénomènes capillaires.

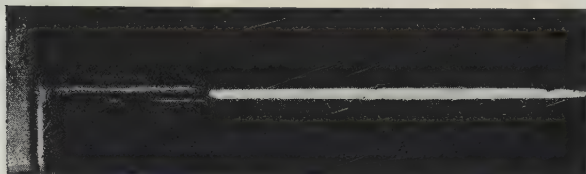
Le régime est alors laminaire dans tout le canal et ceci jusqu'à un nombre de Reynolds  $R_1$  à partir duquel quelques irrégularités dans l'écoulement se produisent d'un côté du canal (fig. 45,  $\beta$ ). Elles semblent prendre naissance contre la cale d'épaisseur correspondante (côté  $b$  par exemple). Le jet n'est donc plus parfaitement laminaire.

PLANCHE IV



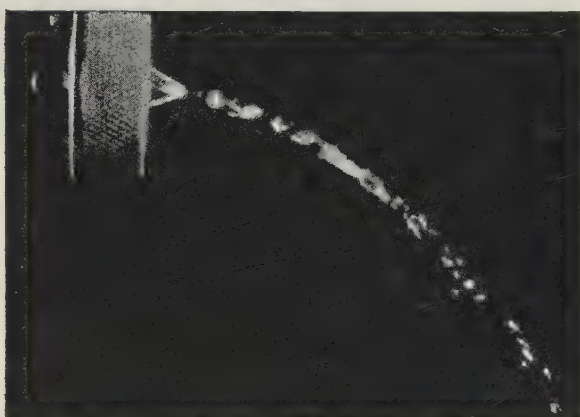
I

Fig. I. — Jet issu d'une conduite cylindrique :  
régime de saccades



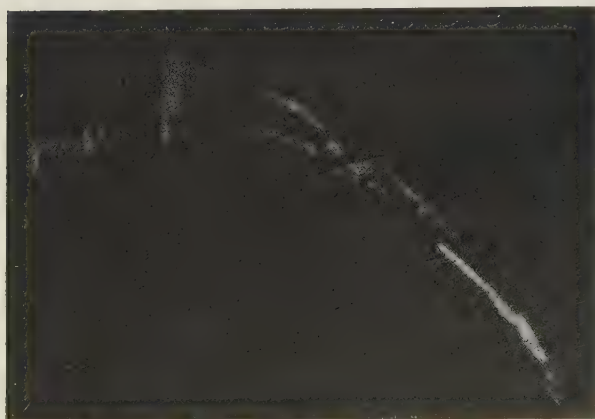
II

Fig. II. — Jet issu d'une conduite cylindrique :  
régime turbulent



III

Fig. III. — Jet issu d'une conduite bidimensionnelle plane :  
régime laminaire



IV

Fig. IV. — Jet issu d'une conduite bidimensionnelle de révolution :  
régime laminaire

Ces irrégularités, d'abord assez espacées dans le temps (de 1 à 2 sec) et non isochrones deviennent de plus en plus fréquentes quand  $\mathcal{R}$  croît. Pour  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_2$  le même phénomène se produit de l'autre côté de la lame côté  $a$  (fig. 45,  $\gamma$ ). Quand  $\mathcal{R}$  continue à croître, leur fréquence devient telle que les bords de la lame liquide prennent un aspect permanent ridé et troublé, différent de celui de la partie centrale qui est restée bien transparente (fig. 45,  $\delta$ ). Les bords de la nappe sont en régime turbulent, le centre garde la nature laminaire : *noyau laminaire*.

Pendant ce temps, d'ailleurs, la structure régulière des rides dues à la capillarité a progressivement disparu. Le noyau laminaire se réduit peu à peu et finit par disparaître. Sa disparition n'est pas brusque mais a lieu d'une manière intermittente de sorte qu'il semble plutôt s'estomper progressivement. Cette disparition lente est difficile à apprécier. Pratiquement elle est totale dès que  $\mathcal{R}$  atteint une valeur  $\mathcal{R}_3$  (fig. 45,  $\epsilon$ ).

La nappe d'eau présente alors un aspect troublé, tout à fait analogue à celui du jet turbulent à la sortie d'un tube cylindrique. Le régime y est donc turbulent.

Dans les expériences qui suivent, les lames de verre sont toujours bien parallèles entre elles mais les cales d'épaisseur ne le sont pas toujours rigoureusement. Elles font entre elles un angle  $2\alpha$  petit (convergent vers l'aval) qui ne dépasse pas  $\frac{1}{200}$  radian, soit environ 17 mn d'angle. Nous prenons pour  $l$  la valeur de moyenne de la largeur.

Les premiers résultats correspondent à une entrée du canal à bords vifs (lame et cales d'épaisseur). Dans le but de retarder l'apparition de la turbulence, nous avons

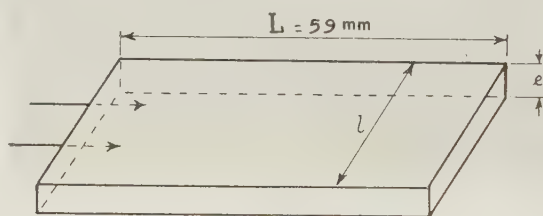


Fig. 46

ensuite arrondi ces bords : ceux des cales seules en premier lieu, ceux des lames seules ensuite, enfin ceux des cales et des lames à la fois.

#### b) ENTRÉE A BORDS VIFS.

Nous avons fait deux fois chaque mesure.

Conduite plane bidimensionnelle (fig. 46).

| $\mathcal{R}$   | 1 <sup>re</sup> EXPÉRIENCE | 2 <sup>e</sup> EXPÉRIENCE    |                                             |
|-----------------|----------------------------|------------------------------|---------------------------------------------|
| $\mathcal{R}_1$ | 940                        | 1 015                        | $e = 0,4 \text{ mm}$                        |
| $\mathcal{R}_2$ | 1 140                      | 1 112                        | $l = 9,95 \text{ mm}$                       |
| $\mathcal{R}_3$ | 1 650                      | 1 620                        | $2\alpha = \frac{1}{200} \text{ rad.}$      |
| $\mathcal{R}$   | 1 <sup>re</sup> EXPÉRIENCE | 2 <sup>e</sup> EXPÉRIENCE    |                                             |
| $\mathcal{R}_1$ | 1 030                      | 1 145                        | $e = 0,4 \text{ mm}$                        |
| $\mathcal{R}_2$ | 1 165                      | 1 285                        | $l = 5,85 \text{ mm}$                       |
| $\mathcal{R}_3$ | 1 375                      | 1 355                        | $2\alpha = \frac{1}{200} \text{ rad.}$      |
| $\mathcal{R}$   | 1 <sup>re</sup> EXPÉRIENCE | 2 <sup>e</sup> EXPÉRIENCE    |                                             |
| $\mathcal{R}_1$ | 1 000                      | 1 040                        | $e = 0,2 \text{ mm}$                        |
| $\mathcal{R}_2$ | 1 000                      | 1 040                        | $l = 5,96 \text{ mm}$                       |
| $\mathcal{R}_3$ | 1 360                      | 1 130<br>(valeur incertaine) | $2\alpha = \frac{2,7}{1\,000} \text{ rad.}$ |

Ces tableaux de résultats montrent bien qu'il est difficile de déterminer avec précision le nombre de Reynolds correspondant au passage d'un régime d'écoulement au suivant.

Deux expériences, faites avec le même appareil exactement, donnent sur  $\mathcal{R}$  des écarts qui peuvent être assez grands (voir la dernière mesure). En particulier, il est très difficile d'apprécier le moment exact où toute structure laminaire disparaît complètement (1).

D'après ces expériences, il semble bien que les premières manifestations de la turbulence prennent naissance sur les bords latéraux de la conduite, au contact des cales d'épaisseur, et ceci pour un nombre de Reynolds  $\mathcal{R}_1 = \frac{we}{v}$ , voisin de 1 000 à 1 100.

Ces premières manifestations de la turbulence sont saccadées et irrégulières. Elles deviennent ensuite permanentes quand  $\mathcal{R}$  augmente et donnent alors aux zones affectées de la nappe liquide son aspect turbulent caractéristique, bien différent de l'aspect laminaire.

Il subsiste, en effet, dans la nappe liquide, dans la région centrale en général, une région qui reste laminaire mais qui, peu à peu, est contaminée par les zones turbulentes.

Dans les tubes cylindriques circulaires, la turbulence se produit pour la première fois par un régime irrégulier de saccades qui affecte, à un moment donné, tout l'écoulement ou une portion de longueur de cet écoulement. La perte de charge, donc aussi le débit instantané, subissent des variations notables. Si l'on trace la courbe donnant le coefficient de perte de charge  $\lambda$  en fonction du nombre de Reynolds, ou plus facilement la courbe donnant la pression motrice  $P$  en fonction du débit  $Q$ , ces courbes présentent une discontinuité dès la première apparition de la turbulence (*fig. 47. Courbe I*).

(1) Il y a lieu de noter qu'on peut commettre sur la mesure de  $Q$  une erreur relative que nous avons évaluée à  $\frac{1}{40}$  ou  $\frac{1}{50}$  donc aussi sur la valeur de  $\mathcal{R}$  correspondante.

Dans le cas d'une conduite plane bidimensionnelle, l'écoulement, à un moment donné, dans une section, est en partie laminaire et en partie turbulent. La fraction turbulente augmente à mesure que le nombre de Reynolds croît et qu'on avance dans la conduite.

Cette différence explique bien pourquoi nous n'avons pas ici de discontinuité dans la représentation graphique de  $\lambda$  en fonction de  $\mathcal{R}$  ou de  $P$  en fonction de  $Q$  : la

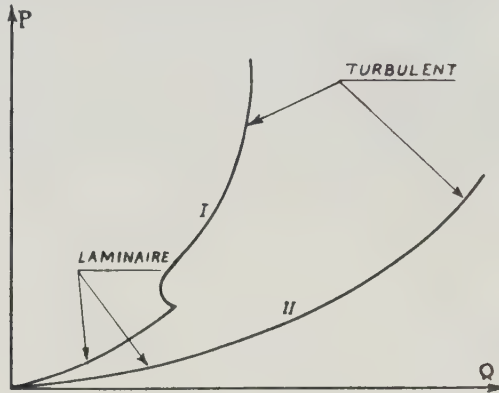


Fig. 47

courbe représentative est continue et change progressivement de pente quand on passe d'un régime à l'autre (fig. 47. Courbe II).

### c) ENTRÉE A BORDS ARRONDIS.

Nous avons d'abord arrondi les *cales d'épaisseur* à l'entrée avec un rayon de courbure voisin de 3 mm, de sorte que la conduite a maintenant la forme donnée par la figure 48.

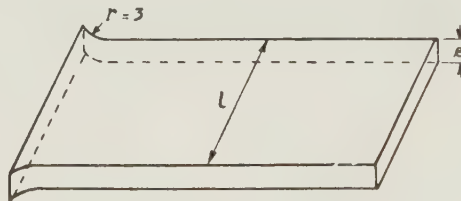


Fig. 48. — Conduite à bords d'entrée arrondis sur les cales d'épaisseur.

Nous avons obtenu les résultats suivants :

|                 |       |                        |
|-----------------|-------|------------------------|
| $\mathcal{R}_1$ | 1 270 | $e = 0,4 \text{ mm};$  |
| $\mathcal{R}_2$ | 1 500 | $l = 10,1 \text{ mm};$ |
| $\mathcal{R}_3$ | 1 640 | $2\alpha = 0.$         |

La naissance de la turbulence sur les bords est retardée, mais le noyau laminaire disparaît pour la même valeur de  $\mathcal{R}$  que précédemment.

Nous avons alors arrondi les *lames de verre* à l'entrée par meulage, puis polissage au rouge à polir, sur un rayon de courbure de l'ordre de 1 mm.

Nous avons obtenu :

| 1 <sup>re</sup> EXPÉRIENCE |       |
|----------------------------|-------|
| $\mathcal{R}_1$            | 1 160 |
| $\mathcal{R}_2$            | 1 160 |
| $\mathcal{R}_3$            | 2 300 |

| 2 <sup>me</sup> EXPÉRIENCE |       |
|----------------------------|-------|
| $\mathcal{R}_1$            | 1 130 |
| $\mathcal{R}_2$            | 1 650 |
| $\mathcal{R}_3$            | 2 120 |

$e = 0,4 \text{ mm};$   
 $l = 10,1 \text{ mm};$   
 $2\alpha = 0.$

Par ailleurs, d'autres expériences faites avec une entrée arrondie seulement sur les lames et non sur les cales d'épaisseur donnent des résultats à peu près semblables à ceux qu'on obtient avec une entrée à bords vifs.

En conclusion de ces expériences, on peut dire que le fait d'arrondir l'entrée apporte une légère amélioration pour prolonger l'état laminaire, mais dans une mesure considérablement plus faible que pour un tube cylindrique.

Le phénomène le plus gênant est certainement la présence des zones turbulentes latérales qui empêchent d'avoir un régime d'écoulement uniforme dans toute la section : il faudrait donc, pour les supprimer, un canal sans cales d'épaisseur.

### Comparaison de ces résultats avec les travaux antérieurs.

Des expériences sur l'écoulement dans un canal rectangulaire de rapport  $\frac{l}{e} = 20$  furent effectuées par FROMM [31]. D'autres par DAVIES, MECH et WHITE [32] pour un rapport  $\frac{l}{e}$  dépassant 100.

Rappelons que dans nos expériences  $\frac{l}{e}$  a varié entre 15 et 50.

Les résultats de DAVIES et WHITE se traduisent par la courbe de la *figure 49*. La loi de Poiseuille est parfaitement vérifiée jusqu'à  $\mathcal{R} = 900$ , mais le régime reste laminaire jusqu'à  $\mathcal{R} = 1\,400$ .

Les points représentatifs s'éloignent simplement de la droite de Poiseuille. Ensuite la turbulence se produit.

En fait, dans l'intervalle 900 — 1 400 leur méthode d'investigation ne permet pas d'affirmer que l'écoulement est laminaire : ils mesurent, en effet, la perte de charge entre deux points de la conduite. Il est fort possible que des zones turbulentes se produisent sur les deux bords latéraux et modifient ainsi la répartition des pressions le long de la conduite.

On ne peut vraiment affirmer l'existence du régime laminaire que pour  $\mathcal{R} \leq 900$ . Dans nos expériences nous avons atteint une valeur plus grande, de l'ordre de 1 150, et nous avons montré que l'état laminaire existait partiellement dans le canal jusqu'à des valeurs de  $\mathcal{R}$  supérieures à 2 000.

Un calcul simple va nous montrer qu'une répartition linéaire des pressions le long de la conduite n'est certainement pas possible, tant que coexistent des zones laminaires et turbulentes comme celles que nous avons signalées.

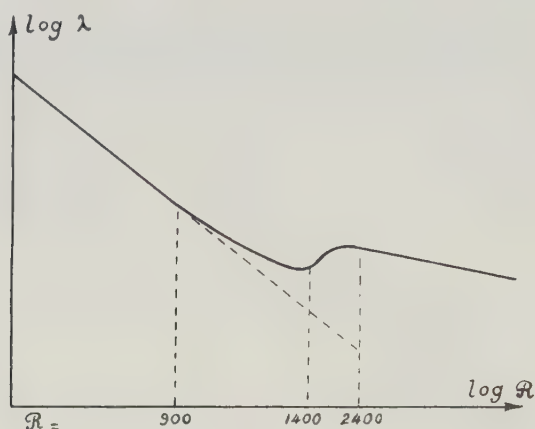


Fig. 49

Étant donné l'aspect de la nappe liquide (*fig. 45, 8*), nous allons admettre qu'à l'intérieur de la conduite il existe une zone laminaire centrale bordée de deux zones turbulentes latérales. Supposons que dans la partie laminaire le profil des vitesses soit la parabole bien connue et la vitesse moyenne correspondante  $u = \frac{2}{3} U_m$  ( $U_m$  = vitesse maximum), avec  $U_m = p \frac{e^2}{8\mu}$ ,  $p$  étant la chute de pression par unité de longueur ( $p$  est constant par hypothèse),  $u$  est donc constant le long de la conduite.

De même, dans les zones turbulentes, en appelant  $v$  la vitesse moyenne, nous devons avoir  $v = \text{constante}$  tout le long de la conduite.

Appelons  $W$  la vitesse moyenne de l'écoulement total, nous avons (*fig. 50*) :

$$lew = (y_1 + y_2) ev + (l - y_1 - y_2) ue,$$

en posant :

$$\frac{y_1 + y_2}{l} = \varepsilon,$$

$\varepsilon$  représente, dans une section droite du canal, la fraction occupée par les zones turbulentes; il vient :

$$\varepsilon v + (1 - \varepsilon) u = w = C^{\text{te}}.$$

D'après notre hypothèse  $u$  et  $v$  sont constants, l'équation précédente entraîne  $\varepsilon = \text{constante}$ .

On aurait donc des écoulements parallèles, côte à côte, laminaire et turbulent, comme le montre la *figure 51*, avec deux lignes de séparation parallèles aux parois. Il est peu probable qu'une telle configuration existe, elle ne serait certainement pas stable.

Il faut donc supposer que la répartition des pressions tout le long de la conduite n'est pas linéaire.

L'écoulement n'est pas stationnaire, le phénomène est analogue à celui qui se produit à l'entrée d'une conduite circulaire longue, sur une longueur égale à 50 ou 60 diamètres.

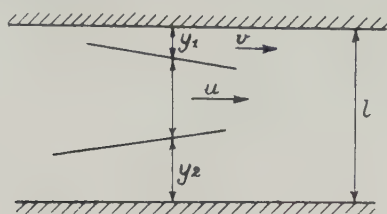


Fig. 50

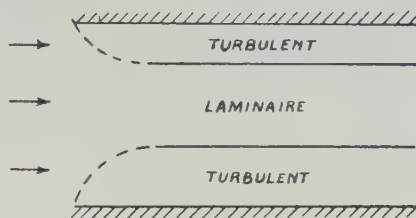


Fig. 51

La conduite plane bidimensionnelle idéale devrait donc être telle que non seulement le rapport  $\frac{l}{e}$  soit grand, mais aussi le rapport  $\frac{L}{l}$ , ce qui semble difficile à réaliser pratiquement ( $L$  étant la longueur de la conduite).

### Conclusions.

Nous avons donc renoncé à étudier l'écoulement dans un diffuseur constitué par deux plans faisant un petit angle entre eux, puisqu'il ne nous est pas possible d'obtenir le régime laminaire jusqu'à des valeurs de  $\mathcal{R}$  suffisamment élevées lorsque les deux plans sont parallèles.

Nous avons repris les expériences en considérant le diffuseur bidimensionnel constitué par l'espace annulaire compris entre un cylindre circulaire et un cône de révolution coaxial de petit angle. Si l'épaisseur  $e$  de l'espace annulaire est petite devant son rayon moyen  $r$ , on aura un écoulement longitudinal se rapprochant beaucoup du précédent et il est probable que les mêmes conclusions théoriques seront applicables qualitativement.

Nous avons naturellement commencé par étudier l'écoulement longitudinal compris entre deux cylindres coaxiaux circulaires voisins, c'est-à-dire dans un tube cylindrique annulaire.

## ÉCOULEMENT DANS UN TUBE CYLINDRIQUE ANNULAIRE

### Répartitions des vitesses.

Dans un tube cylindrique de section circulaire, en écoulement permanent, la vitesse longitudinale  $u$  parallèle aux génératrices du cylindre, n'est fonction que de la distance  $r$  à l'axe.

L'intégration des équations de Navier-Stokes donne en effet :

$$u = -\frac{p}{4\mu} r^2 + A \text{ Log } r + B;$$

avec  $p = \frac{P}{l}$ ,  $P$  étant la différence des pressions aux extrémités d'un tube de longueur  $l$ ;  
 $A$  et  $B$  sont deux constantes d'intégrations déterminées par les conditions aux limites.

Pour un tube annulaire (fig. 52) :

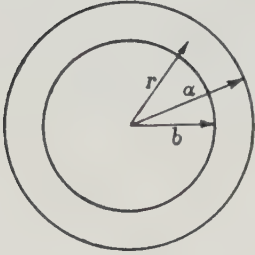


Fig. 52

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad r = a \text{ et } r = b.$$

Donc :

$$0 = -\frac{p}{4\mu} a^2 + A \operatorname{Log} a + B,$$

$$0 = -\frac{p}{4\mu} b^2 + A \operatorname{Log} b + B.$$

On en tire  $A$  et  $B$ , d'où l'expression de  $u$  :

$$(1) \quad u = \frac{p}{4\mu} \left[ a^2 - r^2 + (a^2 - b^2) \frac{\operatorname{Log} \frac{r}{a}}{\operatorname{Log} \frac{b}{a}} \right].$$

Quand  $b = 0$  on trouve  $u = \frac{p}{4\mu} (a^2 - r^2)$  qui est la répartition parabolique bien connue d'un tube cylindrique circulaire.

Étudions l'expression de  $u$ , quand la distance des deux cylindres devient petite devant leur rayon, c'est-à-dire quand la quantité  $\frac{a-b}{a}$  devient petite devant 1.

Posons :

$$a = r_0 + \frac{e}{2} = r_0 \left( 1 + \frac{e}{2r_0} \right), \quad r_0 = \frac{a+b}{2};$$

$$b = r_0 - \frac{e}{2} = r_0 \left( 1 - \frac{e}{2r_0} \right), \quad a - b = e;$$

$$c = r_0 + z = r_0 \left( 1 + \frac{z}{r_0} \right).$$

Introduisons les quantités :

$$\lambda = \frac{e}{2r_0}, \quad x = \frac{z}{r_0};$$

qui sont petites devant 1. Il vient :

$$a = r_0 (1 + \lambda);$$

$$b = r_0 (1 - \lambda);$$

$$r = r_0 (1 + x).$$

Nous en tirons successivement, en abrégant les calculs :

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= 4 r_0^2 \lambda; \\ a^2 - r^2 &= 2 r_0^2 (\lambda - x) \left( 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{x}{2} \right); \\ \frac{r}{a} &= \frac{1+x}{1+\lambda} = 1 - \lambda + x + \lambda^2 - \lambda x - \lambda^3 + \lambda^2 x + \dots; \\ \text{Log } \frac{r}{a} &= (x - \lambda) \left( 1 - \frac{\lambda}{2} - \frac{x}{2} + \frac{\lambda^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{\lambda x}{3} + \dots \right); \\ \frac{a}{b} &= 1 + \frac{2\lambda}{1-\lambda}, \quad \text{Log } \frac{a}{b} = 2\lambda \left( 1 + \frac{\lambda^2}{3} + \dots \right); \\ \frac{1}{\text{Log } \frac{a}{b}} &= \frac{1}{2\lambda} \left( 1 - \frac{\lambda^2}{3} + \dots \right). \end{aligned}$$

D'où, en portant ces développements limités dans l'expression 1 :

$$u = \frac{p}{4\mu} \left[ 2 \left( \frac{e^2}{4} - z^2 \right) \left( 1 - \frac{z}{3r_0} \right) \right] = \frac{p}{2\mu} \left( \frac{e^2}{4} - z^2 \right) \left( 1 - \frac{z}{3r_0} \right).$$

Pour  $r_0 = \infty$  on retrouve la répartition parabolique :

$$u = u_1 = \frac{p}{2\mu} \left( \frac{e^2}{4} - z^2 \right) = u_0 \left[ 1 - \left( \frac{2z}{e} \right)^2 \right].$$

Nous avons donc :

$$u = u_1 \left( 1 - \frac{z}{3r_0} \right).$$

Cette expression, valable quand les deux cylindres coaxiaux sont voisins, montre que l'erreur relative commise sur  $u$ , en confondant sa valeur avec  $u_1$ , est de  $\frac{z}{3r_0}$ .

On voit que dans un tel écoulement, le sommet de la répartition des vitesses est déplacé du centre vers l'axe commun des cylindres (*fig. 53*).

La vitesse maximum atteinte pour :

$$z = -\frac{e^2}{24r_0}$$

est égale à :

$$u_0 = \left( 1 + \frac{5}{144} \frac{e^2}{r_0^2} \right).$$

On peut trouver l'écart maximum :

$$\Delta u = |u - u_1|;$$

il vaut :

$$\Delta u \text{ max} = \frac{u_0}{9\sqrt{3}} \frac{e_0}{r_0},$$

atteint pour :

$$z = \pm \frac{e}{2\sqrt{3}}.$$

Quand  $\frac{e_0}{r_0} \ll 1$ , la répartition des vitesses dans la conduite est donc très voi-

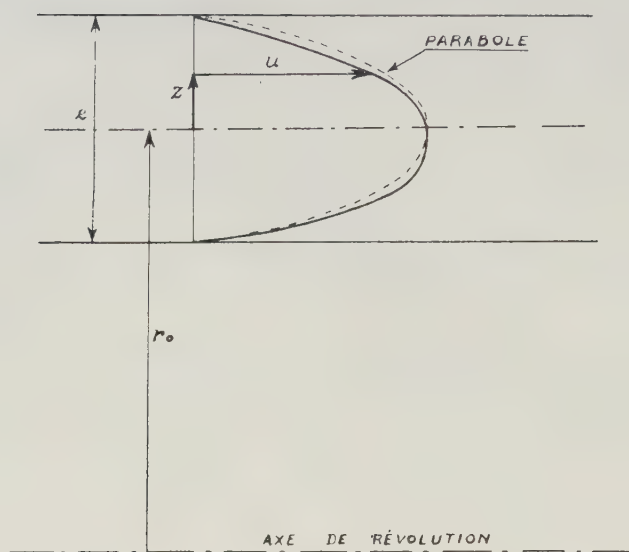


Fig. 53

sine de celle qui existe entre deux plans parallèles indéfinis, c'est-à-dire de la répartition parabolique.

### Réalisation d'une conduite cylindrique annulaire (Planche II, fig. D).

L'obtention de deux surfaces cylindriques bien polies, l'une intérieure, l'autre extérieure, ne présentait pas de difficultés. Mais la fixation mécanique du cylindre intérieur était plus délicate.

Nous avons d'abord essayé de centrer le cylindre intérieur à l'aide de trois fils tendus, à 120° l'un de l'autre.

Plusieurs combinaisons furent essayées, mais aucune ne donna de bons résultats. La présence des fils provoquait toujours une division de l'écoulement en trois parties. Chacune présentait les mêmes effets sur les bords que ceux que nous avons notés au voisinage des cales d'épaisseur d'une conduite bidimensionnelle plane.

Le seul procédé satisfaisant consistait à fixer solidement le cylindre intérieur à un étrier à trois branches, largement évidé, qui se vissait sur le cylindre extérieur.

Il ne fallait pas disposer l'étrier à la sortie de la conduite. Il provoquait un tel bouleversement dans la nappe liquide qu'aucune observation n'était possible. La seule solution consistait donc à visser l'étrier à l'entrée de la conduite, malgré tous les inconvénients que sa présence y apportait. Les trois branches de l'étrier furent rendues aussi minces que possible, autant que le permettait leur résistance mécanique. L'ensemble

était parfaitement centré et, si quelques défauts d'excentrage subsistaient, il était très facile de les corriger à la main (*fig. 54*).

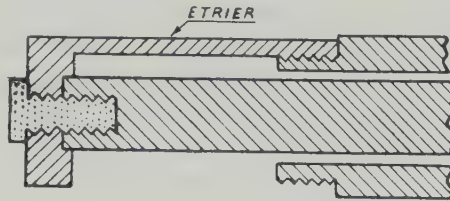


Fig. 54. — Fixation du noyau intérieur

Le cylindre intérieur, se prolongeait vers l'amont jusqu'à la base de l'étrier, à laquelle il était fixé par une vis.

Le cylindre extérieur arrondi à son entrée, se vissait directement sur le réservoir d'eau.

L'ensemble des pièces était en laiton, les surfaces en regard soigneusement polies.

### Résultats expérimentaux.

#### ASPECT DE L'ÉCOULEMENT A LA SORTIE DE LA CONDUITE.

Pour les très faibles vitesses d'écoulement les phénomènes capillaires empêchent la formation d'un jet.

Quand la vitesse augmente, la nappe liquide a l'aspect d'une cloche transpa-

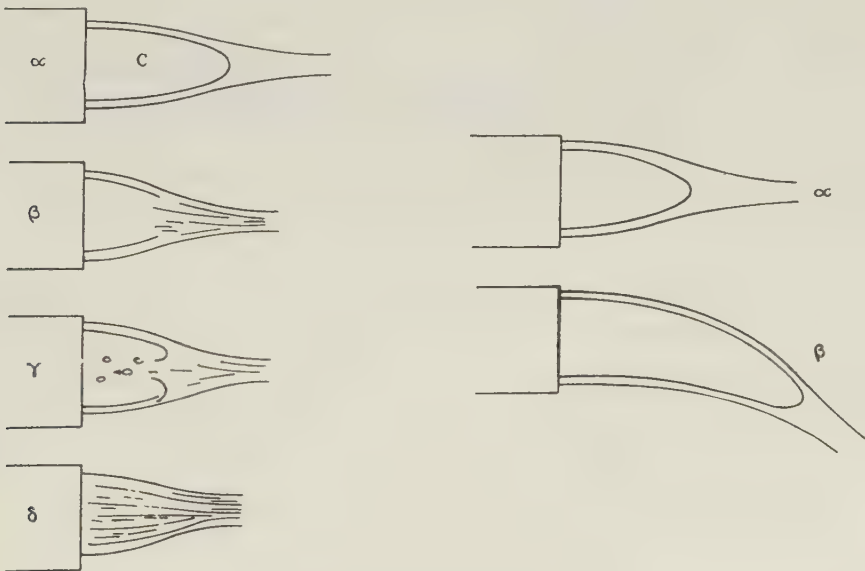


Fig. 55. — Aspects successifs de la cloche C

Fig. 56. — Deux formes possibles de la cloche pour un même écoulement

rente C en forme de pain de sucre. Le jet reste remarquablement groupé ensuite, pendant très longtemps, et bien mieux qu'un jet issu d'un tuyau circulaire (*fig. 55, α*).

Quand on augmente la pression motrice dans le réservoir, seule la base de la cloche reste transparente, le sommet présente de nombreuses rides (*fig. 55,  $\beta$* ).

La longueur de la cloche est variable. On peut l'allonger en y soufflant à l'intérieur de l'air avec un petit tube de verre fin. Si la longueur de la cloche devient trop petite, elle se raccourcit tout d'un coup et prend une position où l'aspect du jet n'est pas stationnaire : des gouttes d'eau issues de la nappe reviennent en arrière et frappent la face plane de sortie du cylindre intérieur (*fig. 55,  $\gamma$* ); en même temps le sommet de la cloche présente une forte agitation.

L'écoulement est encore laminaire à la sortie de la conduite.

Quand on augmente encore la vitesse de sortie, la turbulence apparaît dans une certaine région de la paroi de la cloche pour un nombre de Reynolds  $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1$ . Cette zone turbulente s'étend peu à peu jusqu'à tout envahir, pour un nombre  $\mathcal{R}_2$  (*fig. 55,  $\delta$* ).

Si l'on insuffle de l'air dans la cloche à ce moment, l'excès d'air est aussitôt éliminé, une seule position de la cloche est possible.

En régime laminaire, au contraire, aux faibles vitesses, on peut obtenir diverses formes plus ou moins allongées de la cloche, certaines d'entre elles entrant spontanément en vibration (*fig. 56  $\alpha$  et  $\beta$* ).

Comme à l'entrée de la conduite le cylindre intérieur dépasse le cylindre extérieur, il était naturel d'arrondir les bords *a* et *b* du cylindre extérieur (*fig. 57*).

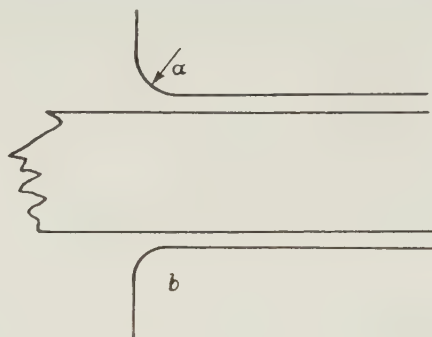


Fig. 57

Nous avons fait plusieurs expériences, la première avec une entrée à bords vifs, ensuite en arrondissant ces bords de différentes façons.

Les expériences furent faites avec une conduite ayant les dimensions suivantes <sup>(1)</sup> (*fig. 58*) :

- longueur :  $L = 99,2$  mm;
- diamètre du cylindre intérieur :  $2b = 14,2$  mm;
- diamètre du cylindre extérieur :

$$\begin{aligned} 2a &= 14,9 \text{ mm à l'entrée;} \\ &15 \text{ mm à la sortie;} \end{aligned}$$

(1) Chaque fois que cela était possible, les mesures de longueur étaient faites au palmer; sinon on utilisait un pied à coulisse de précision.

de sorte que la conduite est légèrement divergente, l'angle 2 vaut :  $2\alpha = \frac{1}{2\,000}$  rad; ce qui est négligeable.

Les nombres de Reynolds  $\mathcal{R} = \frac{We}{\nu}$  sont formés avec la vitesse moyenne  $W$  de l'écoulement et la distance  $e$  des parois en regard.

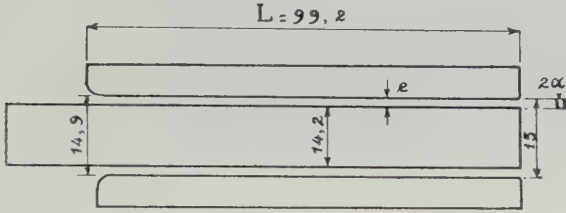


Fig. 58. — Conduite bidimensionnelle (cotes en mm)

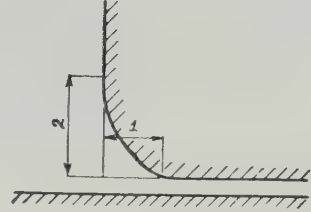


Fig. 59. — Entrée de la conduite (cotes en mm)

Puisque la conduite est légèrement divergente, nous avons pris pour  $e$  la valeur moyenne :

$$e = \frac{14,95 - 14,2}{2} = 0,375 \text{ mm};$$

1<sup>o</sup> entrée à bords vifs :

— première expérience :  $\mathcal{R}_1 = 2\,390$ ;

— deuxième expérience :  $\mathcal{R}_1 = 2\,360$ ;

2<sup>o</sup> entrée à bords arrondis (fig. 56) :

rayon de courbure :  $r_0 = 1 \text{ mm}$ ;

$$\mathcal{R}_1 = 2\,320;$$

3<sup>o</sup> entrée présentant un arrondi largement évasé (fig. 59).

C'est cette forme d'entrée que nous avons conservée pour la suite de nos expériences.

Nous avons mesuré  $\mathcal{R}_1$  plusieurs fois, après avoir démonté et remonté chaque fois tout le dispositif. Nous avons obtenu les nombres suivants :

$$\mathcal{R}_1 = 2\,360, \quad 2\,150, \quad 2\,290.$$

COMPARAISON DE CES RÉSULTATS AVEC LES TRAVAUX ANTÉRIEURS. — CONCLUSIONS.

FAGE [33], en 1938, avait étudié le mouvement de l'eau dans une conduite annulaire analogue à la nôtre (mais sans étrier à l'entrée) et obtenu le régime laminaire jusqu'à  $\mathcal{R} = 2\,940$  : nombre maximum que pouvait lui donner son dispositif expérimental. Le rapport  $\frac{e}{r_0}$  était de l'ordre de  $\frac{1}{5}$  et  $\frac{1}{8}$  au lieu de  $\frac{1}{19}$  environ dans nos expériences (fig. 53).

Cette valeur de  $\mathcal{R}$  est donc supérieure à celles que nous avons obtenues. Comme le fait d'arrondir l'entrée n'apporte pas d'amélioration sensible, il est fort possible que la turbulence commence dès qu'un certain débit total est atteint, débit pour lequel des tourbillons prennent naissance à l'entrée de la conduite, derrière les trois branches de l'étrier de fixation et sont ensuite entraînés dans le mouvement général.

Malgré ce mode de fixation défectueux, la conduite annulaire ainsi réalisée permet d'obtenir sûrement le régime laminaire jusqu'à des nombres de Reynolds supérieurs à 2 000.

Nous pourrions donc partir de cette conduite cylindrique et la transformer en conduite divergente dont nous agrandirons progressivement l'angle d'ouverture  $2\alpha$ , et observerons, pour chaque valeur, l'apparition de la turbulence.

## ÉCOULEMENT DANS UN DIFFUSEUR ANNULAIRE DE RÉVOLUTION

### Réalisation du diffuseur.

Nous avons conservé le même cylindre extérieur que dans les expériences précédentes. A l'intérieur, on peut fixer divers noyaux. Chaque noyau, cylindrique au début, est ensuite aminci sur sa deuxième moitié de manière à lui donner une forme cylindro-tronconique. Le raccordement est naturellement rendu progressif et l'ensemble est poli soigneusement avant chaque expérience.

La conduite réalisée ainsi est annulaire cylindrique sur sa première moitié, annulaire évasée sur la seconde (*fig. 60*).

L'angle  $2\alpha$  du diffuseur est soigneusement mesuré et l'on détermine le nombre de Reynolds  $R_1$  pour lequel le début de la turbulence apparaît dans l'écoulement et,

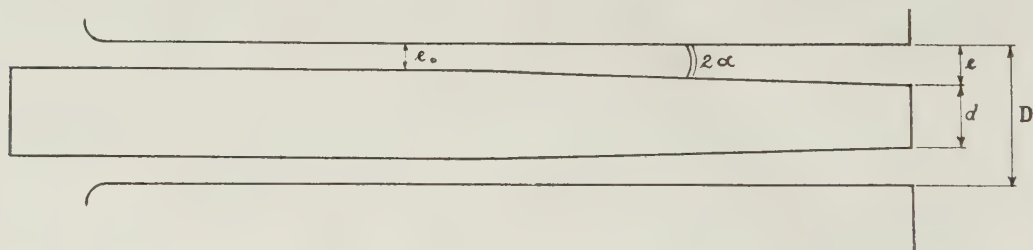


Fig. 60. — Diffuseur annulaire de révolution

accessoirement, le nombre  $R_2$  pour lequel on peut considérer que tout le jet est turbulent.

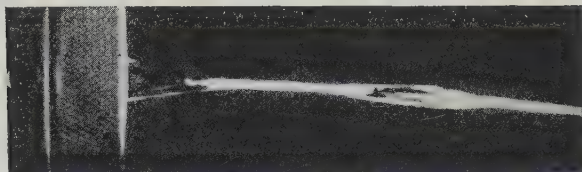
Ces nombres de Reynolds sont formés à partir de la vitesse moyenne  $W$  et de l'épaisseur  $e$  du diffuseur à la sortie.

Pour chaque valeur de l'angle  $2\alpha$ , on fait une ou plusieurs expériences. On augmente ensuite progressivement l'angle  $2\alpha$ .

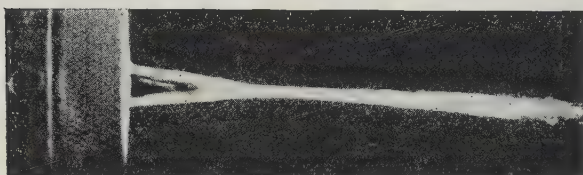
L'aspect de la nappe liquide, à la sortie de la conduite, est tout à fait analogue à celui que nous avons indiqué dans le chapitre précédent (Planche IV, *fig. IV* et Planche V).

Lorsque l'angle  $2\alpha$  augmente, le nombre de Reynolds critique correspond à une vitesse d'écoulement de plus en plus faible et il arrive un moment où les forces capillaires empêchent d'avoir un jet à la sortie; l'observation des phénomènes devient alors difficile puis impossible.

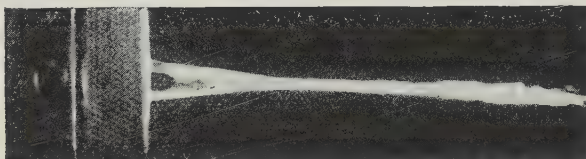
PLANCHE V



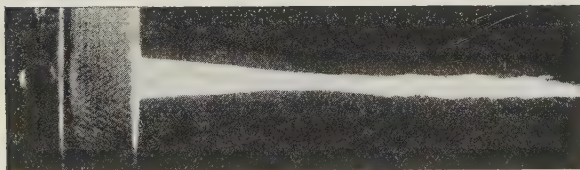
V



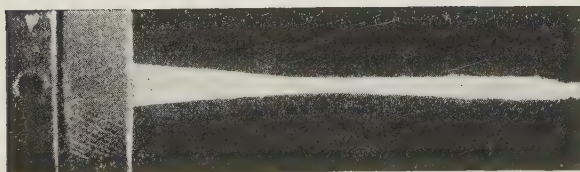
VI



VII



VIII



IX

Fig. V, VI, VII, VIII et IX. — Évolution du jet issu d'une conduite bidimensionnelle plane quand augmente le nombre de Reynolds : disparition progressive de l'état laminaire

La vitesse moyenne  $W$  est déterminée de la manière suivante :

$$W = \frac{Q}{S} = \frac{Q}{\pi \frac{D^2 - d^2}{4}};$$

$Q$  est le débit mesuré;

$D$  et  $d$  les diamètres des deux bords de la conduite à la sortie.

La viscosité cinématique  $\nu$  est toujours déduite de la mesure de la température  $\theta^\circ$  de l'eau à la sortie du réservoir, à l'aide d'un thermomètre à mercure gradué en dixièmes de degré C.

### Résultats expérimentaux.

#### NOYAU INTÉRIEUR CYLINDRIQUE.

Ses dimensions sont données par la *figure 61*.

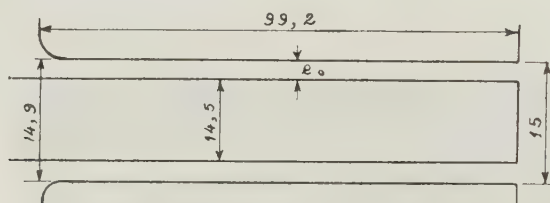


Fig. 61. — Cotes en mm

L'angle  $2\alpha$ , de l'ordre de  $\frac{1}{2000}$  de radian, est négligeable. Nous avons :

$$S = 0,177 \text{ mm}^2, \quad \mathcal{R}_1 = 2140.$$

Le nombre  $\mathcal{R}_2$  est de l'ordre de 2830.

#### NOYAU INTÉRIEUR CYLINDRO-TRONCONIQUE.

L'épaisseur  $e_0$  vaut  $2,5 \cdot 10^{-2}$  cm à la base du diffuseur.

Les résultats sont donnés par le tableau suivant quand  $2\alpha$  varie :

**Tableau**  
e est évalué en  $\overline{\text{cm}}$ ,  $\alpha$  en radians.

| 1 000,2 $\alpha$ | $Q_1$ $\overline{\text{cm}}^3/\text{sec}$ | $\varphi^\circ \text{ C}$ | 100, e       | S $\overline{\text{cm}}^2$ | $\mathfrak{R}_1$ | $\mathfrak{R}_1 \times 2 \alpha$ | $Q_2$      | $\mathfrak{R}_2$ | $\mathfrak{R}_{0,2} \alpha$ |
|------------------|-------------------------------------------|---------------------------|--------------|----------------------------|------------------|----------------------------------|------------|------------------|-----------------------------|
| 4,5<br>4,5       | 123<br>128                                | 11°,7<br>10°,6            | 4,5<br>4,5   | 0,212<br>0,212             | 2 090<br>2 170   | 9,4<br>9,8                       | 160<br>165 | 2 720<br>2 800   | 9,4<br>9,8                  |
| 8,5              | 87,5                                      | 9°,3                      | 6,5          | 0,290                      | 1 475            | 12,5                             | 89         | 1 500            | 11,9                        |
| 10,5             | 65                                        | 12°                       | 7,5          | 0,338                      | 1 160            | 12,2                             |            |                  | 11,8                        |
| 12,5             | 58                                        | 12°,5                     | 8,5          | 0,384                      | 1 050            | 13,1                             |            |                  | 12,7                        |
| 13,95<br>13,95   | 53<br>52                                  | 13°,3<br>12°,8            | 9,5<br>9,5   | 0,423<br>0,423             | 992<br>963       | 13,8<br>13,4                     | 54         | 1 000            | 13,2<br>12,8                |
| 15,85            | 51                                        | 11°,25                    | 10,5         | 0,462                      | 918              | 14,5                             |            |                  | 13,7                        |
| 17,15            | 49,5                                      | 12°                       | 11,5         | 0,502                      | 916              | 15,7                             | 51         | 945              | 14,7                        |
| 19<br>19         | 46<br>48                                  | 12°,4<br>10°,5            | 12,5<br>12,5 | 0,542<br>0,542             | 866<br>858       | 16,4<br>16,3                     | 49         | 877              | 15,2<br>15,1                |
| 22,5             | 43,5                                      | 11°,1                     | 13,5         | 0,581                      | 796              | 17,9                             | 45         | 825              | 16,5                        |
| 24,5<br>24,5     | 41<br>41,5                                | 11°,6<br>9°,55            | 15,5<br>15,5 | 0,658<br>0,658             | 770<br>730       | 18,9<br>17,8                     | 41,5<br>43 | 780<br>757       | 17,2<br>16,2                |
| 27,4             | 45                                        | 7°,3                      | 16,5         | 0,692                      | 757              | 18,4                             | 46         | 773              | 16,5                        |
| 28               | 37,5                                      | 9°,7                      | 19           | 0,785                      | 688              | 19,3                             | 38,5       | 712              | 17,1                        |

Quand l'angle  $2\alpha$  augmente progressivement à partir de zéro, les nombres  $R_1$  et  $R_2$  diminuent simultanément.

Quand  $2\alpha$  est petit ( $2\alpha < 8,5 \cdot 10^{-3}$  rad)  $R_1$  et  $R_2$  sont nettement différents, c'est-à-dire le passage d'un régime établi à l'autre s'opère progressivement. Le phénomène est analogue à celui que nous avons observé dans le cas de la conduite plane bidimensionnelle.

Au contraire, quand  $2\alpha$  est plus grand, le passage se fait très rapidement. On peut alors penser que la turbulence se produit dès qu'une forme donnée de répartition des vitesses est atteinte en régime laminaire.

On observe, en outre, que le produit  $R_1 \times 2\alpha$  augmente à peu près linéairement à mesure que  $\alpha$  croît (fig. 62).

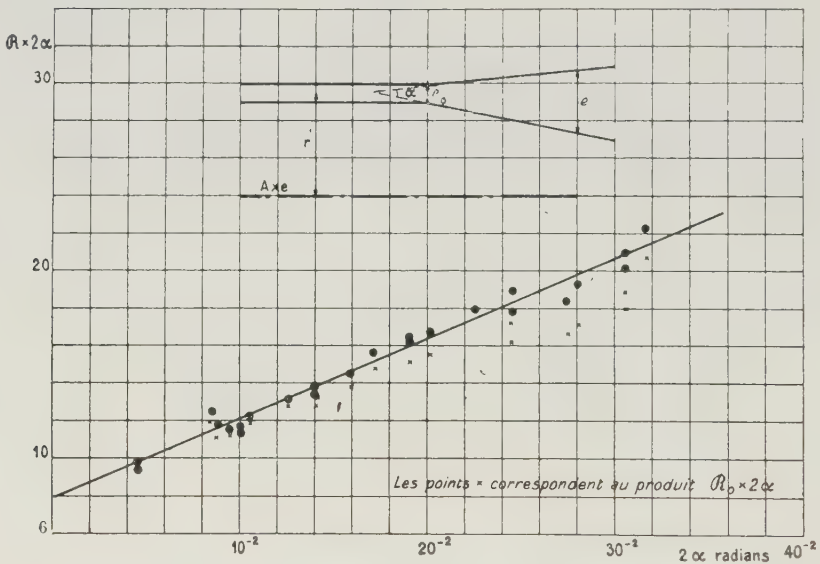


Fig. 62

Nous avons fait d'autres expériences en utilisant différents noyaux cylindro-coniques dont le diamètre de la partie cylindrique a varié, c'est-à-dire l'épaisseur  $e_0$ .

La partie cylindrique et la partie conique sont à peu près de même longueur (50 mm).

| $100 \cdot e_0$ | $1000 \cdot 2\alpha$ | $100 \cdot e$ | $R_1$ | $R_1 \times 2\alpha$ | $R_0 \times 2\alpha$ |
|-----------------|----------------------|---------------|-------|----------------------|----------------------|
| 3,5             | 10                   | 8,5           | 1 135 | 11,35                | 10,9                 |
| 3,5             | 10                   | 8,5           | 1 155 | 11,6                 | 11,2                 |
| 3,5             | 20                   | 13,5          | 842   | 16,8                 | 15,7                 |
| 4,5             | 31,6                 | 20,1          | 706   | 22,3                 | 20,7                 |
| 5               | 30,5                 | 20            | 658   | 20,1                 | 18                   |
| 5               | 30,5                 | 20            | 687   | 21                   | 18,8                 |
| 7,5             | 9,4                  | 11,75         | 1 225 | 11,5                 | 11,1                 |

Enfin, en utilisant un noyau dont la partie conique commençait presque à l'entrée de la conduite, nous avons trouvé :

| $100.e_0$ | $1\ 000.2\ \alpha$ | $100.e$ | $\mathcal{R}_1$ | $\mathcal{R}_1.2\ \alpha$ | $\mathcal{R}_0.2\ \alpha$ |
|-----------|--------------------|---------|-----------------|---------------------------|---------------------------|
| 4         | 8,55               | 12,25   | 1 380           | 11,8                      | 11,1                      |

Tous ces résultats concordent bien et les points représentatifs se trouvent sensiblement sur la même courbe qui semble une portion de droite dont l'ordonnée, à l'origine, donnerait, pour  $2\ \alpha$  nul, une valeur de  $\mathcal{R}_1 \times 2\ \alpha$  de l'ordre de 8 <sup>(1)</sup> (fig. 62).

REMARQUES.

- 1° La courbe donnant la pression  $P$  en fonction du débit  $Q$  ne présente pas de discontinuité au passage laminaire turbulent, pas plus que dans le diffuseur plan;
- 2° au voisinage de la vitesse critique le jet est très sensible aux chocs et aux bruits (sons graves). Ce phénomène semble donc général;
- 3° dès que  $2\ \alpha$  est notable (par exemple  $2\ \alpha > \frac{15}{1\ 000}$  ou  $\frac{20}{1\ 000}$  rad), s'il y a un léger excentrage du noyau intérieur, tout le jet passe d'un côté de la conduite annulaire

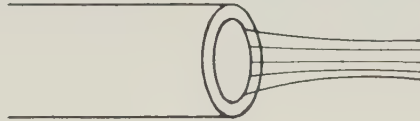


Fig. 63. — Écoulement dans une conduite excentrée

à une vitesse beaucoup plus grande que dans l'écoulement de révolution pour la même pression motrice. Si ce jet était turbulent, il peut redevenir laminaire (fig. 63).

Conclusions.

Ces résultats expérimentaux nous fournissent des données, pour le produit critique  $\mathcal{R}_1 \times 2\ \alpha$ , qui sont bien de l'ordre de grandeur des valeurs établies théoriquement dans le cas d'un diffuseur en forme de dièdre.

Mais ce produit  $\mathcal{R}_1 \times 2\ \alpha$  augmente avec  $2\ \alpha$ , suivant une loi sensiblement exprimée par la formule empirique :

$$2\ \alpha . \mathcal{R}_1 = 8 + 433 \times 2\ \alpha ,$$

soit :

$$2\ \alpha (\mathcal{R}_1 - 433) = 8 .$$

Nous allons donner dans le chapitre suivant une méthode de calcul approximative qui permet de retrouver une partie de ces résultats, en même temps qu'une interprétation des variations du produit  $\mathcal{R}_1 \times 2\ \alpha$ .

(1) Tant que l'angle  $2\ \alpha$  n'est pas trop grand, l'influence de la courbure de la section semble négligeable puisque les points obtenus se trouvent sensiblement sur la même courbe.

## ÉTUDE THÉORIQUE

### Équations de l'hydrodynamique dans un système de révolution.

Nous supposons qu'en tout point de la conduite étudiée, l'intervalle  $e$  entre les deux surfaces est petit devant la distance  $r$  à l'axe de révolution, de telle sorte que l'écoulement sera de type bidimensionnel.

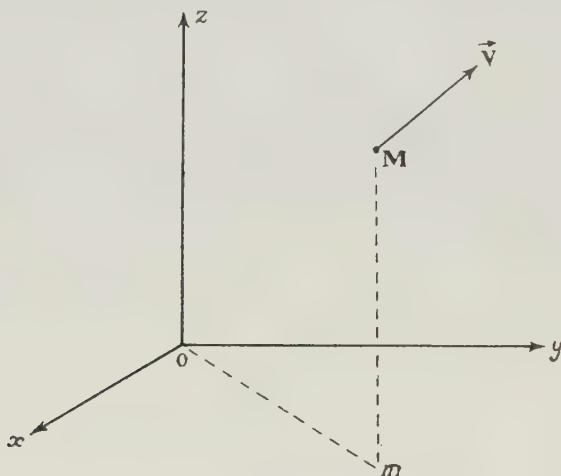


Fig. 64

Nous admettons que l'écoulement se fait dans les plans méridiens.

Prenons des coordonnées cylindriques : l'axe de révolution est  $oz$  (fig. 64) :

$$\begin{cases} x = r \cos \Phi, \\ y = r \sin \Phi, \\ z = z \end{cases}$$

et soient  $u, v, w$  les composantes de la vitesse  $V$  en  $M$  suivant les coordonnées définies par  $r, \Phi, z$ .

Les équations de Navier-Stokes sont les suivantes (fluide incompressible : mouvement permanent) :

$$(1) \quad u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \Phi} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta u - \frac{u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \Phi} \right);$$

$$(2) \quad u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \Phi} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \Phi} + \nu \left( \Delta v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \Phi} - \frac{v}{r^2} \right);$$

$$(3) \quad u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \Phi} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu (\Delta w);$$

avec :

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \Phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et l'équation de continuité :

$$(4) \quad \operatorname{div} \vec{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \Phi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Par hypothèse nous devons avoir (en régime permanent) (*fig. 65*) :

$$v = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \Phi} = 0.$$

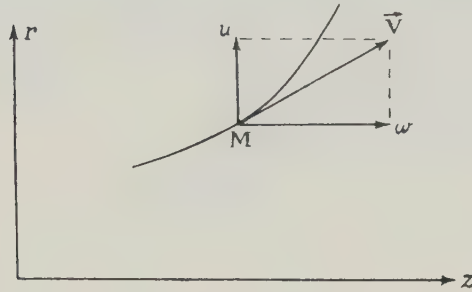


Fig. 65. — Écoulement dans un méridien

Il vient donc :

$$(5) \quad u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \Delta u - \frac{u}{r^2} \right);$$

$$(6) \quad 0 = 0$$

$$(7) \quad u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \Delta w;$$

avec :

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

et l'équation de continuité :

$$(8) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

ou :

$$\frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial}{\partial z} (rw) = 0.$$

### Simplification des équations (conduite à deux dimensions).

Nous allons simplifier ces équations en appliquant la méthode utilisée dans la théorie de la couche limite.

Pour cela, nous supposons que le rayon  $r$  varie peu autour d'une valeur moyenne fixe  $r_0$ , de sorte que l'on a :

$$r = r_0 + h;$$

avec  $h$  petit devant  $r$ , et par suite devant  $r_0$ .

Donc on peut poser :

$$h = \varepsilon \eta \quad \left| \begin{array}{l} \varepsilon \text{ est un infiniment petit de deuxième ordre par rapport à } r_0; \\ \eta \text{ est une variable nouvelle, variant de } 0 \text{ à l'infini.} \end{array} \right.$$

Les quantités  $w, r, z$  sont du même ordre de grandeur.

Nous avons par suite :

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial h} = \frac{\partial}{\varepsilon \partial \eta}$$

et l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial (ru)}{\varepsilon \partial \eta} + \frac{\partial}{\partial z} (rw) = 0;$$

le deuxième terme est de grandeur finie. Pour qu'il en soit ainsi du second, il faut que  $u$  soit infiniment petit du même ordre que  $\varepsilon$  :

$$u = \varepsilon g [r(\eta), z].$$

Les équations du mouvement deviennent :

$$\begin{aligned} \varepsilon g \frac{\varepsilon \partial g}{\varepsilon \partial \eta} + w \frac{\varepsilon \partial g}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\varepsilon \partial \eta} + \nu \left[ \frac{\varepsilon \partial^2 g}{\varepsilon^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\varepsilon \partial g}{\varepsilon \partial \eta} + \varepsilon \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \right]; \\ \varepsilon g \frac{\partial w}{\varepsilon \partial \eta} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 w}{\varepsilon^2 \partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\varepsilon \partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right]. \end{aligned}$$

D'après la deuxième équation, pour que le coefficient de  $\nu$  soit du même ordre que les autres termes, il est nécessaire que  $\nu$  soit de l'ordre de  $\varepsilon^2$ .

La première équation nous conduit de même à poser :

$$\frac{\partial p}{\partial \eta} = 0 \quad \text{soit} \quad p = p(z).$$

Nous avons donc le système suivant à résoudre, en ne tenant compte dans les équations que des termes de même ordre :

$$(9) \quad p = p(z);$$

$$(10) \quad u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2};$$

$$(8) \quad \frac{\partial (ru)}{\partial r} + \frac{\partial (rw)}{\partial z} = 0.$$

Nous pouvons écrire l'équation de continuité :

$$u + r \frac{\partial u}{\partial r} + r \frac{\partial w}{\partial z} = 0;$$

soit :

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\left[ \frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right].$$

Portons cette valeur dans l'équation (10) :

$$u \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{u}{r} - w \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2};$$

or :

$$u \frac{\partial w}{\partial r} - w \frac{\partial u}{\partial r} = -w^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{w} \right).$$

Donc :

$$-w^2 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u}{w} \right) - w \frac{u}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2};$$

$$-\frac{w^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{ru}{w} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}.$$

Les équations se présentent maintenant sous la forme simple suivante :

$$(9) \quad p = p(z);$$

$$(11) \quad -\frac{w^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{ru}{w} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2};$$

$$(8) \quad \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial}{\partial z} (rw) = 0.$$

L'équation (11) montre que la chute de pression le long de  $z$  est équilibrée :

1° par les forces de viscosité  $-\nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}$ ;

2° par les forces d'inertie  $-\frac{w^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{ru}{w} \right)$ .

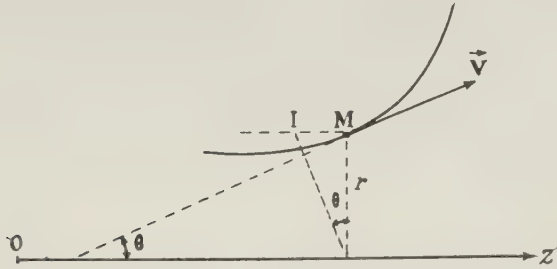


Fig. 66

Dans le cas du mouvement longitudinal laminaire entre deux cylindres coaxiaux, ( $u = 0$ ), on retrouve bien l'équation :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 0;$$

qui correspond à la répartition parabolique. Remarquons que :

$$\frac{u}{v} = \operatorname{tg} \theta,$$

$\theta$  étant l'angle que fait en M la vitesse avec l'axe  $oz$  et

$$\frac{ru}{w} = r \operatorname{tg} \theta = \text{IM (fig. 66).}$$

### Application à la conduite divergente étudiée.

Dans les expériences que nous avons faites, les deux surfaces de révolution voisines constituant le diffuseur étaient deux cônes coaxiaux de petit angle mais non de même sommet. L'un de ces cônes d'ailleurs était presque un cylindre.

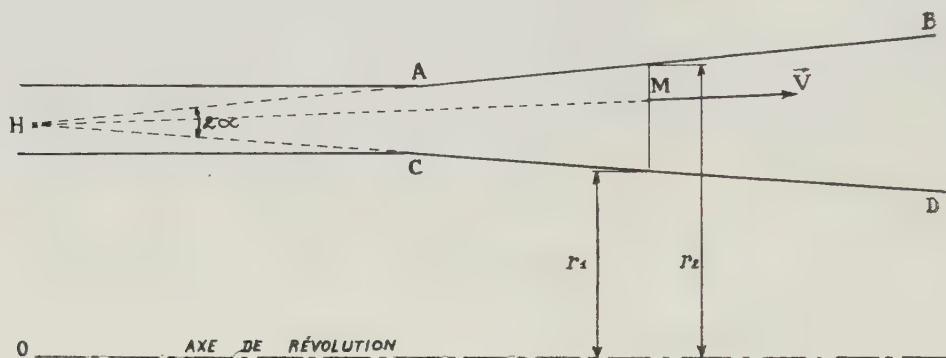


Fig. 67

Supposons que, dans un plan méridien, les lignes de courant soient rectilignes et passent par le point de rencontre H des parois CD et EF.

Si  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont les angles que font ces droites avec  $oz$  on a :

$$\theta_1 - \theta_2 = 2 \alpha = \text{Cte (fig. 67).}$$

Comme en chaque point M,  $r$  est grand par rapport à la différence  $e = r_1 - r_2$ , on peut aussi supposer que la pente des lignes de courant, qui est petite, varie linéairement quand on passe d'une paroi à l'autre, et on a :

$$\frac{u}{w} \neq \operatorname{tg} \left( \frac{u}{w} \right) = \operatorname{tg} \theta = ar + b;$$

avec :

$$a = \frac{\theta_1 - \theta_2}{r_1 - r_2} = \frac{2 \alpha}{e}, \quad b = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} - \frac{r_1 + r_2}{2} \frac{2 \alpha}{e}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{ru}{w} &= ar^2 + br, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{ru}{w} \right) &= 2a + \frac{b}{r} = \frac{2 \alpha}{e} \left[ 2 - \frac{r_1 + r_2}{2r} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2 \alpha} \frac{e}{2r} \right]. \end{aligned}$$

Nous avons supposé que  $r$  variait peu autour de sa valeur moyenne  $r_0$  donc on peut poser :  $\frac{r_1 + r_2}{2r} = 1$ ; quant au terme  $\frac{\theta_1 + \theta_2}{2 \alpha} \times \frac{e}{2r}$ , il est évidemment petit devant 1.

On peut donc écrire :

$$(12) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{ru}{w} \right) \neq \frac{2}{e} \frac{\alpha}{R},$$

en appelant  $R$  la distance radiale  $HM$ .

D'autre part, comme  $r_1$  et  $r_2$  varient lentement avec  $z$  ( $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont des angles petits), on peut supposer en première approximation que sur une petite longueur  $\Delta z$  le gradient de pression est constant :

$$(13) \quad -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = K \quad (K \text{ étant une constante}).$$

Sur cette petite longueur,  $\Delta z$ ,  $R$  et  $e$  seront considérés comme constants et  $w$  ne dépendant que de  $r$ . Le mouvement sera défini par :

$$(14) \quad \boxed{-\frac{w^2}{R} = K + \nu \frac{d^2 w}{dr^2}}.$$

Nous avons là une équation différentielle du deuxième ordre, à coefficients non constants, mais que l'on peut résoudre. Multiplions les deux membres par  $\frac{dw}{dr}$  et intégrons une fois, il vient :

$$-\frac{w^3}{3R} = Kw + \frac{\nu}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 - H,$$

$H$  est une constante d'intégration, soit :

$$\left( \frac{dw}{dr} \right)^2 = \frac{2}{3\nu R} [3R(H - Kw) - w^3].$$

Donc :

$$(15) \quad \boxed{\frac{dw}{dr} = \pm \sqrt{\frac{2}{3\nu R}} \sqrt{-w^3 - 3R(Kw - H)}};$$

ou :

$$(15') \quad dr = \pm \sqrt{\frac{3\nu R}{2}} \frac{dw}{\sqrt{-w^3 - 3R(Kw - H)}}.$$

### Discussion de la solution.

Cette équation montre que, pour une valeur donnée  $w_1$ , la dérivée  $\frac{dw}{dr}$ , c'est-à-dire la pente du profil des vitesses, ne peut prendre que deux valeurs égales et opposées.

Les seules valeurs de  $w$ , physiquement possibles en régime laminaire, sont celles de  $w \geq 0$ , sinon il se produirait un écoulement partiellement à reflux.

D'autre part, il est nécessaire que :

$$-w^3 - 3R(Kw - H) \geq 0.$$

Nous pouvons écrire :

$$(16) \quad -w^3 - 3R(Kw - H) = -(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3);$$

$w_1, w_2, w_3$  étant les racines de l'équation du troisième degré :

$$(17) \quad -w^3 - R(Kw - H) = 0.$$

La répartition des vitesses dans la conduite est telle que  $w$  s'annule sur la paroi et, par suite, présente au moins un maximum  $M$  entre ces parois.

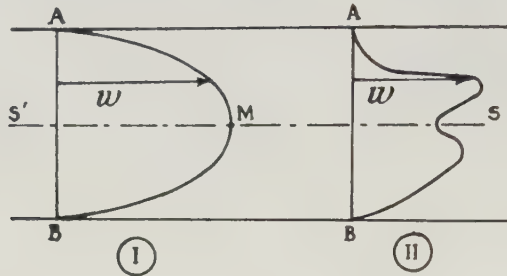


Fig. 68. — Profils de vitesses

Il est facile de voir que le seul profil possible est du type I (fig. 68) symétrique par rapport à la droite  $S'S$ , parallèle à  $oz$ , qui passe en  $M$ . Un profil non symétrique ou du type II ne pourrait satisfaire à la condition imposée aux valeurs de  $\frac{dw}{dr}$  par l'équation (15).  $\frac{dw}{dr}$  est positif de  $B$  à  $M$ , négatif de  $M$  à  $A$ .

Soit  $w_1$  la vitesse maximum, racine de l'équation (17) ( $w_1$  est positif).

Les deux autres racines sont ou toutes deux réelles, ou imaginaires conjuguées. Entre ces racines nous avons les relations :

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 + w_3 &= 0; \\ w_1 w_2 + w_2 w_3 + w_3 w_1 &= 3RK; \\ w_1 w_2 w_3 &= 3RH. \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} w_2 + w_3 &= -w_1, \\ w_2 \times w_3 &= \frac{3RH}{w_1}. \end{aligned}$$

Sur les parois :

$$w = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{dw}{dr}\right)^2 = \frac{2H}{\nu}.$$

Il faut donc que :

$$H \geq 0,$$

par suite :

$$w_2 \cdot w_3 \geq 0,$$

et comme :

$$w_2 + w_3 = -w_1 < 0;$$

il s'ensuit que  $w_2$  et  $w_3$  sont :

$$\left| \begin{array}{l} \text{— ou tous deux négatifs;} \\ \text{— ou imaginaires conjugués.} \end{array} \right.$$

Nous retrouverons bien le profil I (*fig.* 68) comme seul possible entre les parois. A la limite d'ailleurs,  $w_2$  (ou  $w_3$ ) peut être nul et correspondre aux points sur les parois.

On peut écrire, en introduisant la vitesse maximum  $w_1$  :

$$-(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3) = (w_1 - w) \left( w^2 + ww_1 + \frac{3 RH}{w_1} \right),$$

et l'équation (15) donne :

$$dr = \pm \sqrt{\frac{3 \nu R}{2}} \frac{dw}{\sqrt{(w_1 - w) \left( w^2 + ww_1 + \frac{3 RH}{w_1} \right)}}$$

et, en intégrant de la paroi B au maximum M :

$$\frac{e}{2} = \sqrt{\frac{3 \nu R}{2}} \int_0^{w_1} \frac{dw}{\sqrt{(w_1 - w) \left( w^2 + ww_1 + \frac{3 RH}{w_1} \right)}}.$$

Or,  $w_1 - w$  est positif ainsi que les différents termes qui figurent dans le crochet. Pour une valeur donnée de  $w_1$ , on peut imaginer toutes sortes de profils de vitesses pour lesquels  $w$  reste positif ou nul d'une paroi à l'autre. Mais au profil pour lequel  $H = 0$  correspond une intégrale maximum. Autrement dit, pour une valeur donnée de la vitesse maximum  $w_1$ , la valeur maximum de  $e$  est donnée par :

$$(18) \quad \frac{e}{2} = \sqrt{\frac{3 \nu R}{2}} \int_0^{w_1} \frac{dw}{\sqrt{(w_1 - w)(w^2 + ww_1)}}.$$

La quantité sous le radical vaut alors :

$$-w^3 - 3 RKw = -w(w^2 + 3 RK).$$

Comme  $w$  est positif il faut donc que :

$$w^2 + 3 RK \leq 0 \quad \text{soit} \quad K < 0.$$

### Condition d'existence du mouvement laminaire.

La condition :

$$K = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} < 0$$

signifie que  $p$  augmente dans le sens du courant.

Par ailleurs  $H = 0$  entraîne que  $w_2 w_3 = 0$ .

Il s'ensuit que les valeurs  $w_1, w_2, w_3$  sont données par :

$$\begin{aligned} w_1 &= +\sqrt{-3 RK}; \\ w_2 &= 0; \\ w_3 &= -\sqrt{-3 RK}. \end{aligned}$$

Sur les parois ( $w = 0$ ) on a  $\frac{dw}{dr} = 0$ . La tangente au profil des vitesses est pratiquement normale à la paroi.

Ce profil possède un point d'inflexion pour  $\frac{d^2w}{dr^2} = 0$ , soit pour :

$$w = w_1 = \sqrt{-RK} = \frac{w_1}{\sqrt{3}}.$$

Posons maintenant :

$$\begin{aligned} w &= w_1 \cos^2 \varphi; \\ dw &= -w_1 \cdot 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi; \end{aligned}$$

l'équation (18) devient :

$$\frac{e}{\sqrt{6\nu R}} \sqrt{w_1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}.$$

Or :

$$e \sqrt{\frac{w_1}{6\nu R}} = \sqrt{\frac{e}{R} \cdot \frac{ew_1}{6\nu}};$$

comme :

$$\frac{e}{R} = 2\alpha;$$

et en posant :

$$R_m = \frac{w_1 e}{\nu};$$

il vient :

$$\sqrt{\frac{R_m \cdot 2\alpha}{24}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}}.$$

Le calcul graphique de l'intégrale donne (fig. 69) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}} = 1,31.$$

Donc :

$$(19) \quad \boxed{R_m \cdot 2\alpha = 41,2}.$$

On peut calculer la répartition des vitesses et la vitesse moyenne correspondant à ce cas limite.

Le profil des vitesses se détermine d'après la formule :

$$(r - r_1) \sqrt{\frac{w_1}{6 R v}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi}};$$

avec :

$$\frac{w}{w_1} = \cos^2 \varphi.$$

Il est donné par la *figure 70*.

$$\text{Calcul de } \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}} \quad \text{avec} \quad \Phi = 1 + \cos^2 \varphi$$

| $\varphi$ (degrés)                                            | 0     | 10    | 20    | 30    | 40    | 50    | 60    | 70    | 80    | 90 |
|---------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----|
| $\frac{w}{w_1} = \cos^2 \varphi$                              | 1     | 0,970 | 0,883 | 0,750 | 0,587 | 0,413 | 0,250 | 0,117 | 0,030 | 0  |
| $\frac{1}{\sqrt{\Phi}}$                                       | 0,708 | 0,713 | 0,728 | 0,756 | 0,795 | 0,842 | 0,895 | 0,948 | 0,985 | 1  |
| $\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi}}$ | 1,31  | 1,187 | 1,063 | 0,933 | 0,798 | 0,655 | 0,503 | 0,342 | 0,175 | 0  |

On trouve ainsi comme vitesse moyenne :

$$w = 0,456 w_1.$$

La relation (19) s'écrit alors, en posant  $\mathcal{R} = \frac{we}{v}$  :

$$(20) \quad \boxed{\mathcal{R} . 2 \alpha = 18,8} .$$

La relation (19) est exactement la même que pour un diffuseur dièdre (page 65, formule 1'), ce qui ne doit pas nous surprendre, étant données les hypothèses faites sur les dimensions linéaires de la canalisation.

La linéarisation des équations de l'hydrodynamique et les approximations faites sont ainsi justifiées.

### Évolution du profil des vitesses pour $e$ et $w_1$ donnés.

Pour  $e$  et  $w_1$  donnés :

— quand  $\alpha = 0$ , nous avons une répartition des vitesses paraboliques (ou du moins qui en est très voisine) avec  $K > 0$ ;

— quand  $\alpha$  augmente, on s'éloigne progressivement de cette répartition pour atteindre celle que nous venons de déterminer comme cas limite, mais avec  $K < 0$ .

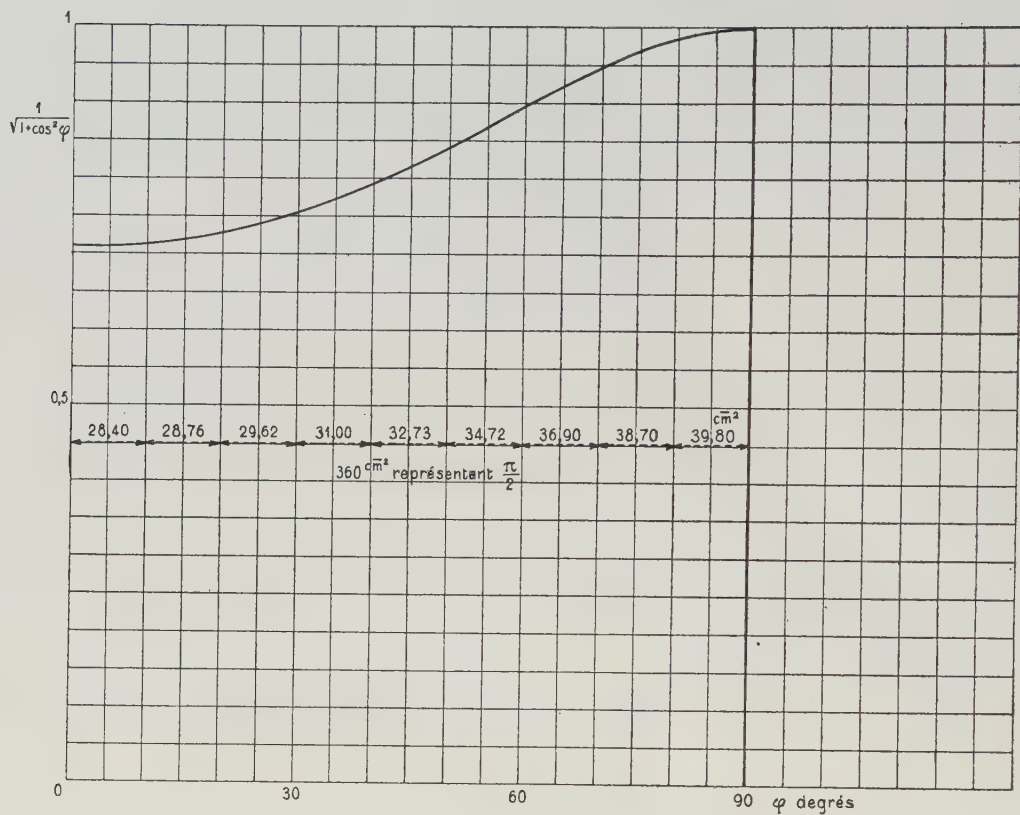


Fig. 69

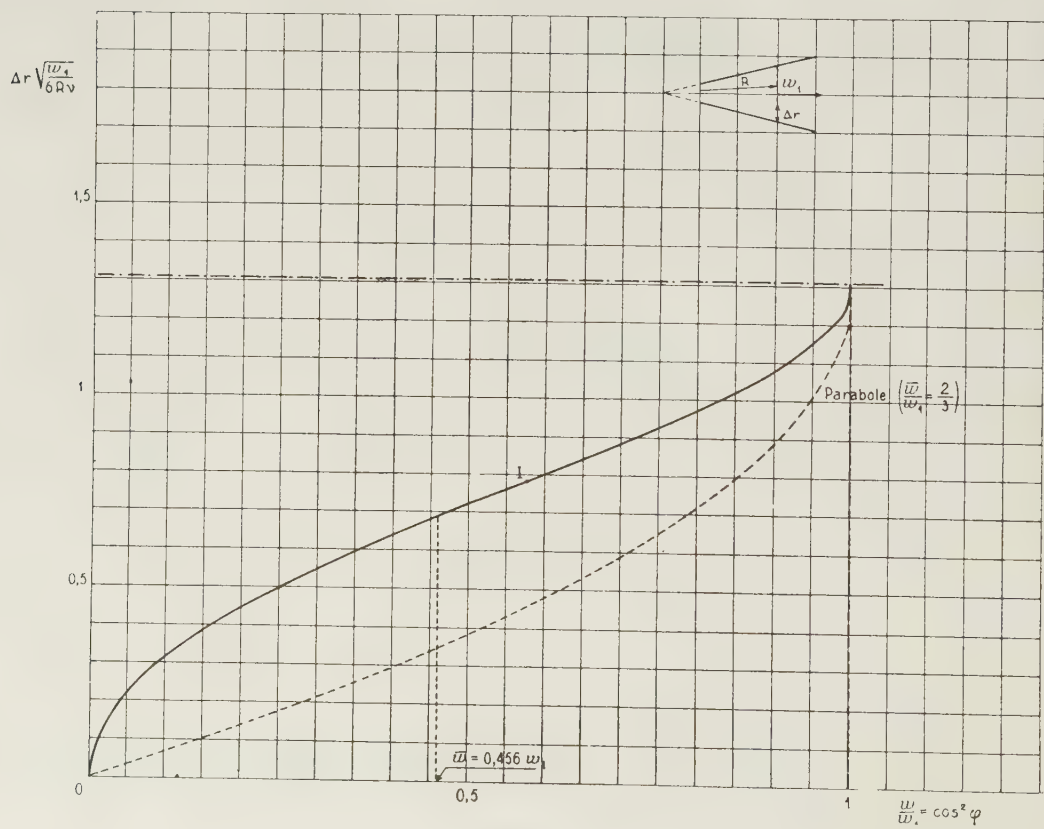


Fig. 70

Précisons cette évolution du profil des vitesses à l'aide de l'équation (14) :

$$(14) \quad -\frac{w^2}{R} - K = \nu \frac{d^2 w}{dr^2}.$$

Sur une petite longueur  $\Delta z$  on supposera encore que  $K$  reste constant.

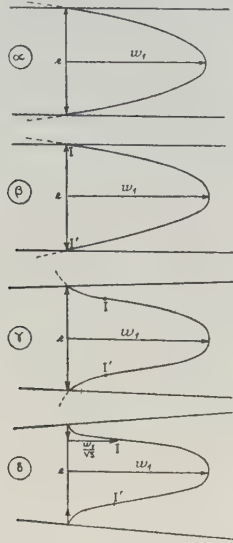


Fig. 71. — Évolution du profil des vitesses avec  $2\alpha$

Pour  $2\alpha = 0$  le profil des vitesses est donné par la figure 71,  $\alpha$ , c'est une parabole :

$$\frac{d^2 w}{dr^2} < 0;$$

et :

$$K = K_0 > 0 \quad \text{avec} \quad K_0 = \frac{8 \nu w_1}{e^2}.$$

Faisons croître  $2\alpha$  à partir de zéro.

Pour une valeur déterminée de  $2\alpha$ ,  $\frac{w^2}{R}$  varie de 0 à  $\frac{w_1^2}{R}$  quand on s'éloigne de la paroi,  $\nu \frac{d^2 w}{dr^2}$  diminue donc de :

$$-K \quad \text{à} \quad -\left(K + \frac{w_1^2}{R}\right).$$

On a ainsi les variations de la courbure du profil des vitesses :

— si  $K > 0$ , la pression croît dans le sens de l'écoulement,  $\nu \frac{d^2 w}{dr^2}$  reste encore partout négatif;

— si  $K = 0$ , la pression reste constante dans le sens de l'écoulement,  $\nu \frac{d^2 w}{dr^2}$  reste encore négatif mais il y a un point d'inflexion sur les parois  $\left(\frac{d^2 w}{dr^2} = 0 \text{ pour } w = 0\right)$  (fig. 71,  $\beta$ ), nous avons alors  $2\alpha = \frac{12,1}{R}$ .

— si  $K < 0$ , la pression croît dans le sens de l'écoulement,  $\nu \frac{d^2 w}{dr^2}$  est d'abord positif, au voisinage des parois.

Physiquement, le profil des vitesses doit changer de courbure,  $\nu \frac{d^2 w}{dr^2}$  s'annule donc en un point d'inflexion donné par :

$$w_1 = \sqrt{-RK} \text{ (fig. 71, } \gamma \text{)}.$$

Si  $K$  diminue, la courbe se déforme régulièrement jusqu'à ce qu'elle s'éloigne normalement des parois (fig. 71,  $\delta$ ). C'est le profil limite que nous avons étudié, nous avons alors :

$$2\alpha = 2\alpha_M = \frac{41,2}{R_M} \quad \text{et} \quad K = K_M = -\frac{w_1^2}{3R} = -13,7 \frac{w_1 \nu}{e^2}$$

et le point d'inflexion correspond à :

$$w_1 = \sqrt{-RK} = \frac{w_1}{\sqrt{3}}.$$

En résumé, quand  $2\alpha$  augmente de 0 à  $2\alpha_M$ , le coefficient  $K$  diminue donc de :

$$\frac{8 \nu w_1}{e^2} \quad \text{à} \quad -13,7 \frac{\nu w_1}{e^2} \text{ (fig. 72).}$$

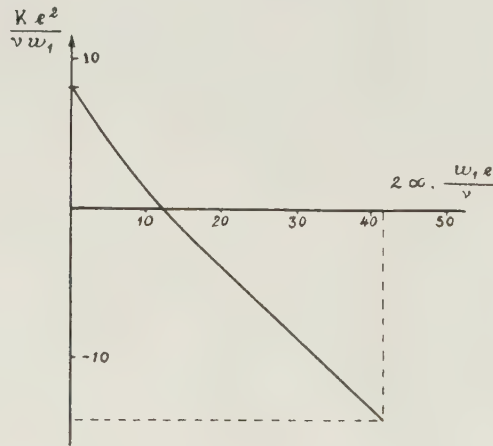


Fig. 72

### Étude du cas particulier $K = 0$ .

L'équation (15') s'écrit :

$$(21) \quad dr = \pm \sqrt{\frac{3 \nu R}{2}} \frac{dw}{\sqrt{-w^3 + 3RH}};$$

nous avons alors  $w_1 = \sqrt[3]{3RH}$  comme seule racine réelle de l'équation (17).

Les deux autres racines sont imaginaires conjuguées.

Il faut donc que  $H$  soit positif.

Sur les parois :  $w = 0$  et  $\frac{d^2w}{dr^2} = 0$  (point d'inflexion);

$$\frac{dw}{dr} = \pm \sqrt{\frac{2H}{\nu}}.$$

Faisons le changement de variable défini par :

$$w = w_1 \cos^2 \varphi;$$

l'équation (21) devient :

$$(22) \quad \sqrt{\frac{2w_1}{3\nu R}} \times e = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2 + \cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Le calcul graphique de l'intégrale donne (*fig. 73*) :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{2 + \cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = 0,71.$$

L'équation (22) fournit donc la relation suivante; en posant encore  $\mathcal{R}_1 = \frac{w_1 e}{\nu}$  :

$$(23) \quad \mathcal{R}_1 \times 2\alpha = 12,1.$$

D'autre part on peut calculer la vitesse moyenne de ce profil (*fig. 74*) on trouve :

$$w = 0,62 w_1.$$

Par suite, en posant  $\mathcal{R} = \frac{we}{\nu}$ , la relation (23) s'écrit :

$$(24) \quad \boxed{\mathcal{R} \times 2\alpha = 7,5}.$$

$$\text{Calcul de } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi'}} \quad \text{avec} \quad \Phi' = 2 + \cos^2 \varphi + \operatorname{tg}^2 \varphi$$

| $\varphi$ (degrés)                                     | 0     | 10    | 20    | 30    | 40    | 50    | 60    | 70    | 80    | 90       |
|--------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\frac{w}{w_1} = \cos^2 \varphi$                       | 1     | 0,970 | 0,883 | 0,750 | 0,587 | 0,413 | 0,250 | 0,117 | 0,030 | 0        |
| $\operatorname{tg}^2 \varphi$                          | 0     | 0,031 | 0,132 | 0,333 | 0,704 | 1,42  | 3     | 7,55  | 32,1  | $\infty$ |
| $\Phi'$                                                | 3     | 3,001 | 3,015 | 3,083 | 3,291 | 3,833 | 5,250 | 9,667 | 34,13 | $\infty$ |
| $\frac{1}{\sqrt{\Phi'}}$                               | 0,577 | 0,577 | 0,575 | 0,570 | 0,551 | 0,511 | 0,436 | 0,321 | 0,171 | 0        |
| $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\Phi'}}$ | 0,71  | 0,598 | 0,498 | 0,398 | 0,302 | 0,208 | 0,125 | 0,059 | 0,015 | 0        |

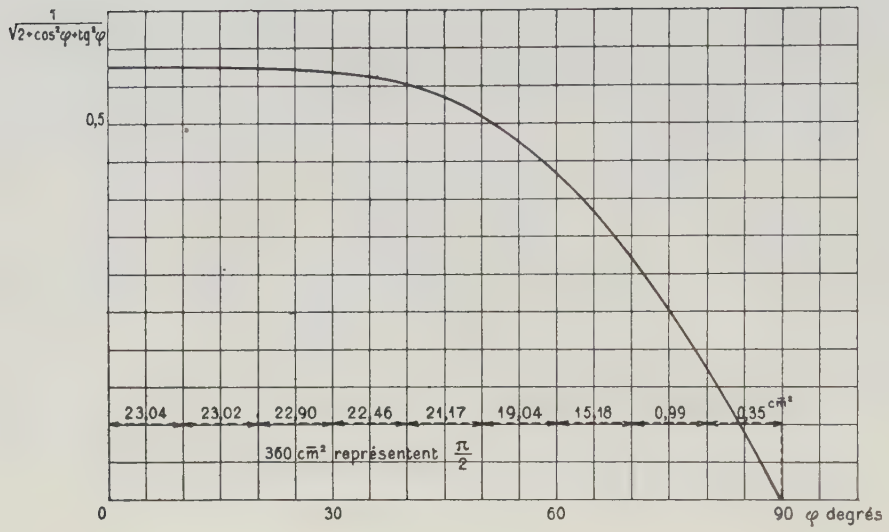


Fig. 73

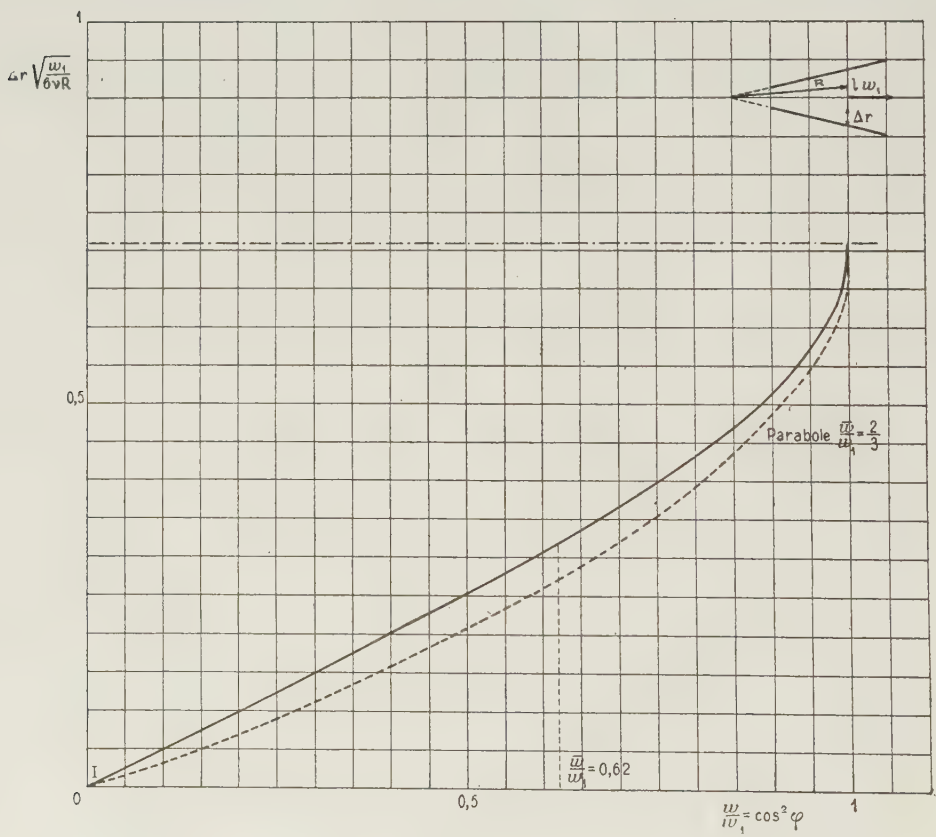


Fig. 74

## INTERPRÉTATION THÉORIQUE DES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX

D'après nos mesures, le nombre de Reynolds critique  $\mathcal{R}$  pour lequel commence la turbulence est lié à l'angle  $2\alpha$  par la relation empirique :

$$(25) \quad 2\alpha(\mathcal{R} - 433) = 8,$$

$\mathcal{R}$  augmente quand  $\alpha$  diminue. Quand  $\alpha$  est très petit on a sensiblement :

$$(26) \quad \mathcal{R} \cdot 2\alpha = 8.$$

Cette valeur est à rapprocher de celle que donne la formule théorique (24).

Elle correspondrait donc à un profil de vitesse ayant un point d'inflexion sur la paroi.

Par ailleurs la théorie de la stabilité de la couche limite de Tollmien-Schlichting indique qu'aux grandes valeurs de  $\mathcal{R}$  (théoriquement pour  $\mathcal{R}$  infini) les profils à point d'inflexion sont instables vis-à-vis des petites perturbations (critérium de Tollmien) [34].

On peut donc penser que pour ces grandes valeurs de  $\mathcal{R}$  les irrégularités de la paroi prennent une importance capitale : petites rayures, ondulations légères, raccordement défectueux entre les parties rectiligne et divergente de la conduite, etc. En effet, malgré tout le soin apporté à la réalisation mécanique des surfaces, ces défauts sont inévitables à l'échelle microscopique.

L'écoulement qui pourrait rester laminaire est le siège de petites perturbations susceptibles de s'amplifier.

La turbulence se produit donc, et c'est justement lorsqu'un point d'inflexion apparaît sur le profil.

Quand  $2\alpha$  augmente,  $\mathcal{R}$  diminue, mais  $\mathcal{R} \times 2\alpha$  augmente. Le critérium de Tollmien n'est plus exactement valable et les irrégularités prennent de moins en moins d'importance. En même temps, le profil des vitesses se déforme progressivement comme nous l'avons indiqué plus haut et le point d'inflexion se déplace vers son sommet.

Quand ce profil part normalement à la paroi, un décollement commence avec des zones de reflux. L'écoulement laminaire ne peut plus exister et la turbulence se produit nécessairement, indépendamment de toute perturbation. Théoriquement, ce phénomène doit se produire quand :

$$(20) \quad \mathcal{R} \cdot 2\alpha = 18,8;$$

ou :

$$(19) \quad \mathcal{R}_m \cdot 2\alpha = 41,2.$$

Pour les grandes valeurs de  $\alpha$ , le rapport  $\frac{e}{r}$  augmente vite (dans nos expériences  $\frac{e}{r}$  variait de  $\frac{1}{36}$  à  $\frac{1}{3,5}$  environ). Pour ces valeurs, les hypothèses sur lesquelles est basé le calcul ne sont plus applicables. Il n'est pas étonnant qu'à partir d'une certaine valeur ( $2\alpha$  de l'ordre de  $\frac{26}{1\,000}$  rad) les points expérimentaux correspondent à des produits  $\mathcal{R} \cdot 2\alpha$  supérieurs à 18,8.

En dehors de cette région, nous trouvons des quantités qui sont bien de l'ordre de grandeur de celles qui étaient prévues.

#### REMARQUE.

On peut comparer ces résultats avec ceux des calculs d'Abramowitz. La valeur critique donnée par cet auteur est  $\mathcal{R}_0 \cdot 2\alpha = 24,64$  (BLASIUS avait trouvé 35).

Bien que ses calculs aient été effectués dans le cas d'un diffuseur en forme de dièdre raccordé à deux plans parallèles, nous pouvons les étendre au cas d'une conduite annulaire moyennant les hypothèses faites.

Les produits  $\mathcal{R}_0 \cdot 2\alpha$  figurent dans la dernière colonne des tableaux de mesures (pages 85, 86 et 87).

Ils sont aussi rapportés sur le graphique de la *figure 62*.

La valeur 24,64 est plus grande que nos valeurs expérimentales. L'écart peut très bien s'expliquer en considérant la méthode suivie par ABRAMOWITZ. C'est une méthode inspirée de celle de BLASIUS, mais améliorée, dans laquelle on fait dériver le profil des vitesses dans le divergent, du profil parabolique existant dans la partie rectiligne.

Étant donnés les écarts importants existant entre ces deux profils (voir la *fig. 70*), il est possible qu'une approximation encore meilleure donnerait une valeur plus proche des valeurs expérimentales.

## CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Nous avons effectué ces recherches dans le but de préciser les raisons pour lesquelles se produit la turbulence dans les conduites en charge.

Des expériences réalisées avec des conduites cylindriques circulaires, permettant d'obtenir le régime laminaire jusqu'à de grandes valeurs du nombre de Reynolds, nous ont fourni les deux résultats principaux suivants :

a) — la turbulence provoquée par un phénomène mécanique (à condition qu'il soit d'intensité suffisante) ne persiste pas si l'action mécanique cesse.

Toutefois, si la conduite est reliée à un dispositif présentant une certaine élasticité, la turbulence persistera, mais en aval seulement de ce dispositif qui jouera le rôle de perturbateur mécanique auto-entretenu;

b) — en l'absence de toute perturbation mécanique, le régime turbulent s'introduit quand même dans l'écoulement réel. Il faut en rechercher la cause dans la forme géométrique de la canalisation. A cette forme géométrique est attaché un nombre de Reynolds critique  $\mathcal{R}_c$ , au delà duquel on ne pourra jamais obtenir le régime laminaire, quelques précautions qu'on prenne.

Un tube donné possède ainsi un nombre critique  $\mathcal{R}_c$  qui lui est attaché comme une étiquette. Une très légère modification de la forme géométrique peut entraîner de grandes variations pour  $\mathcal{R}_c$ .

Nous avons étudié plus particulièrement l'influence de cette forme géométrique dans le cas des conduites à deux dimensions — en forme de diffuseur. Une interprétation théorique très simple permet de confirmer les résultats de nos expériences.

---



## ANNEXE. I

---

### RENTRÉE D'EAU PAR UN TROU PERCÉ DANS LA PAROI DU TUBE

---

#### RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES

Le volume  $u$ , qui s'écoule entre les index B et C (*fig. 15*) distants de 10 cm, est de :

$$u = 0,32 \text{ cm}^3.$$

On assimile le trou T à une ellipse d'axes rectangulaires  $a$  et  $b$  de sorte que l'aire du trou est :

$$S = \pi \frac{ab}{4}.$$

Or, le périmètre  $L$  d'une ellipse est donné par :

$$L = K\pi \frac{a+b}{2},$$

$K$  étant un coefficient variant de 1 à 1,0156 quand  $\frac{b}{a}$  varie de 1 à 0,6.

Comme pour les trous percés, le rapport  $\frac{b}{a}$  reste toujours voisin de 1, on ne commet pas d'erreur sensible en prenant  $K = 1$  et pour diamètre hydraulique du trou l'expression :

$$d = \frac{4S}{L} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}}.$$

Les grandeurs  $a$  et  $b$  sont mesurées au microscope et exprimées ci-dessous en divisions du micromètre oculaire ainsi que  $L$  et  $d$  (1 division du micromètre oculaire =  $3,08 \cdot 10^{-3}$  cm). Nous avons :

$$\begin{aligned} v_c &= \frac{u}{St_c}; \\ y &= \frac{v_c d}{v} = \frac{u}{St_c} \cdot \frac{4S}{L v} = \frac{4u}{L v t_c}; \\ &= \frac{4 \times 0,32}{v} \frac{1}{3,08 \cdot 10^{-3}} \frac{1}{Lt_c}; \end{aligned}$$

d'où :

$$y = \frac{132}{\nu t_c \frac{a+b}{2}}.$$

La viscosité cinématique  $\nu$  de l'eau, déduite de la mesure de la température de l'eau, est tirée de l'ouvrage : BARR, *A Monography of viscosimetry*.

Dans les tableaux de chiffres qui suivent :

1° l'indice affectant la lettre T correspond au même trou, mais d'un diamètre croissant en même temps que l'indice;

2° l'indice  $c$  a été supprimé pour désigner les quantités critiques  $t_c$  et  $\nu_c$ , mesurées respectivement en secondes et centimètres par seconde.

Nous avons donc :

$$\nu_c = \nu = \frac{4,32 \cdot 10^4}{abt} \text{ cm/sec;}$$

$$y = \frac{\nu d}{\nu} = \frac{132}{\nu t \frac{a+b}{2}}.$$

Rappelons que les quantités  $a$ ,  $b$ ,  $d$  sont exprimées en divisions du micromètre oculaire,  $\nu$  en unités cgs;

3° les calculs ont été effectués en tirant, par interpolation, les valeurs critiques  $t$  pour les trois nombres  $\mathcal{R}$  suivants : 2 700, 4 800, 12 750.

#### TUBE D (fig. 75)

Longueur totale 60 cm      D = 0,46 cm

Trou T à mi-longueur

| TROUS          | $a$  | $b$  | $d = \frac{a \times b}{\frac{a+b}{2}}$ | $\frac{D}{d}$ | ° C   | 100 $\nu$ |
|----------------|------|------|----------------------------------------|---------------|-------|-----------|
| T <sub>1</sub> | 4,8  | 5,2  | 5                                      | 30            | 19°   | 1,034     |
| T <sub>2</sub> | 7    | 7,5  | 7,25                                   | 20,6          | 19°   | 1,034     |
| T <sub>3</sub> | 9,2  | 11   | 10                                     | 14,9          | 21°   | 0,984     |
| T <sub>4</sub> | 12   | 15   | 13,3                                   | 11,2          | 21°,5 | 0,972     |
| T <sub>5</sub> | 17   | 19   | 18                                     | 8,3           | 21°   | 0,984     |
| T <sub>6</sub> | 21,5 | 24,5 | 22,9                                   | 6,5           | 20°   | 1,009     |
| T <sub>7</sub> | 30   | 34   | 31,9                                   | 4,67          | 21°   | 0,984     |

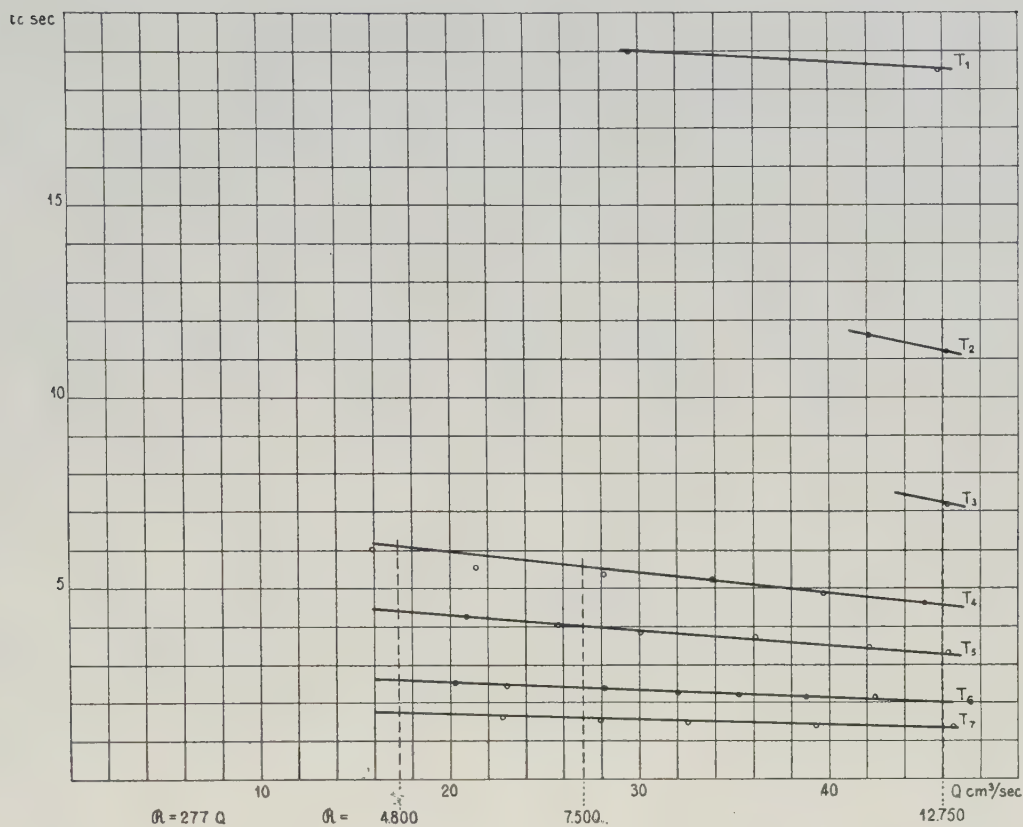


Fig. 75

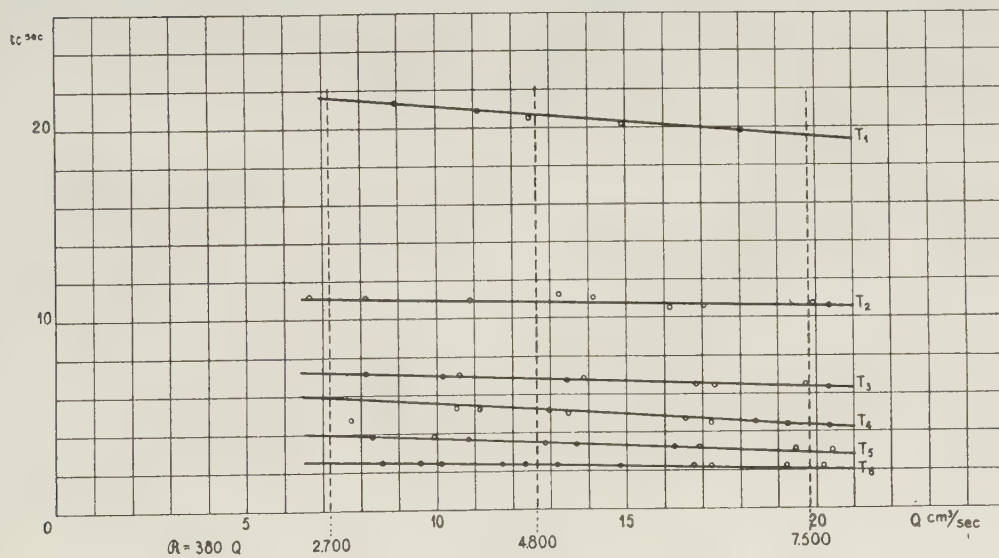


Fig. 76

TUBE F (fig. 76)

Longueur totale 45,6 cm      D = 0,345 cm

Trou T à mi-longueur

| TROUS          | a   | b    | $d = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}}$ | $\frac{D}{d}$ | ° C   | 100 v |
|----------------|-----|------|--------------------------------|---------------|-------|-------|
| T <sub>1</sub> | 4   | 5    | 4,45                           | 25,2          | 21°,5 | 0,972 |
| T <sub>2</sub> | 7,8 | 7,8  | 7,8                            | 15,4          | 21°   | 0,984 |
| T <sub>3</sub> | 10  | 10,4 | 10,2                           | 11            | 18°,5 | 1,047 |
| T <sub>4</sub> | 12  | 14,5 | 13,13                          | 8,5           | 20°,5 | 0,997 |
| T <sub>5</sub> | 17  | 18   | 17,5                           | 6,4           | 21°   | 0,984 |
| T <sub>6</sub> | 24  | 24   | 24                             | 4,67          | 20°,5 | 0,997 |

TUBE D (fig. 75)

Longueur totale 60 cm      D = 0,46 cm

| TROUS          | R = 4 800 |    |                     |                       | R = 12 750 |      |                     |                       |
|----------------|-----------|----|---------------------|-----------------------|------------|------|---------------------|-----------------------|
|                | t         | v  | $y = \frac{v d}{v}$ | $x = \frac{v D}{V d}$ | t          | v    | $y = \frac{v d}{v}$ | $x = \frac{v D}{V d}$ |
| T <sub>1</sub> |           |    |                     |                       | 18,5       | 93,5 | 138                 | 10,1                  |
| T <sub>2</sub> |           |    |                     |                       | 11,3       | 73   | 156                 | 5,42                  |
| T <sub>3</sub> |           |    |                     |                       | 7,3        | 58,8 | 183                 | 3,17                  |
| T <sub>4</sub> | 6         | 40 | 170                 | 4,31                  | 4,6        | 52,2 | 222                 | 2,12                  |
| T <sub>5</sub> | 4,35      | 31 | 171,5               | 2,45                  | 3,4        | 39,3 | 218                 | 1,18                  |
| T <sub>6</sub> | 2,55      | 32 | 224                 | 2,01                  | 2,1        | 39,1 | 272                 | 0,92                  |
| T <sub>7</sub> | 1,7       | 25 | 247                 | 1,12                  | 1,4        | 30,2 | 300                 | 0,515                 |

TUBE F (fig. 76)

Longueur totale 45,6 cm      D = 0,345 cm

| TROUS          | R = 2 700 |      |                     |                       | R = 4 800 |      |                     |                       |
|----------------|-----------|------|---------------------|-----------------------|-----------|------|---------------------|-----------------------|
|                | t         | v    | $y = \frac{v d}{v}$ | $x = \frac{v D}{V d}$ | t         | v    | $y = \frac{v d}{v}$ | $x = \frac{v D}{V d}$ |
| T <sub>1</sub> | 21,6      | 100  | 141                 | 33,1                  | 20,6      | 105  | 148                 | 19,6                  |
| T <sub>2</sub> | 11        | 64,5 | 156                 | 13,1                  | 10,8      | 65,7 | 159                 | 7,5                   |
| T <sub>3</sub> | 7,2       | 57,8 | 172                 | 8,38                  | 6,7       | 62   | 185                 | 5,06                  |
| T <sub>4</sub> | 5,8       | 42,8 | 174                 | 4,78                  | 5         | 49,7 | 202                 | 3,13                  |
| T <sub>5</sub> | 3,8       | 37,2 | 202                 | 3,14                  | 3,4       | 41,6 | 226                 | 1,97                  |
| T <sub>6</sub> | 2,4       | 31,3 | 230                 | 1,92                  | 2,2       | 34,2 | 252                 | 1,18                  |

## ANNEXE II

### ÉCOULEMENT DANS UN TUYAU LÉGÈREMENT COURBÉ

(Dean, réf. [19])

Le tube est supposé légèrement courbé circulairement.

Si le cercle (C) est la section droite du tube, son centre C décrit un cercle (T) de rayon R d'axe oz.

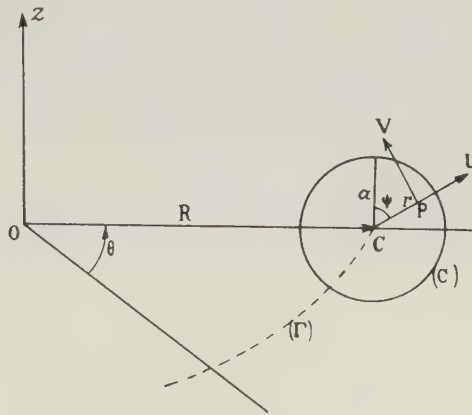


Fig. 77

Un point quelconque de la section droite est défini par les coordonnées (fig. 77) :

$$r, \varphi, \theta.$$

Les composantes de la vitesse relatives à ces coordonnées sont :

$$U, V, W.$$

Le sens de l'écoulement général correspond au sens des  $\theta$  croissants.

On peut supposer que U, V, W sont indépendants de  $\theta$  (mouvement stationnaire), mais la pression P en dépend.

DEAN a effectué les calculs en supposant que l'on a :

$$\begin{aligned}U &= u; \\V &= v; \\W &= A(a^2 - r^2) + w; \\ \frac{P}{\rho} &= Cz + \frac{p}{\rho};\end{aligned}$$

où  $u, v, w$  et  $p$  sont des quantités petites de l'ordre de grandeur de  $\frac{a}{R}$ .

La solution où  $u = v = w = p = 0$  correspond à l'écoulement dans un tube rectiligne  $R = \infty$ .

On est amené à poser :

$$\begin{aligned}u &= u' \sin \psi; \\v &= v' \cos \psi; \\w &= w' \sin \psi; \\ \frac{p}{\rho} &= p' \sin \psi;\end{aligned}$$

où  $u', v', w'$  et  $p'$  sont fonction de  $r$  seulement.

La linéarisation des équations de l'hydrodynamique fournit la solution :

$$\begin{aligned}\frac{U}{W_1} &= \frac{\mathcal{R}}{288} \frac{a}{R} \sin \psi (1 - r'^2) (4 - r'^2); \\ \frac{V}{W_1} &= \frac{\mathcal{R}}{288} \frac{a}{R} \cos \psi (1 - r'^2) (4 - 23 r'^2 + 7 r'^4); \\ \frac{W}{W_1} &= (1 - r'^2) \left[ 1 - \frac{3}{4} r' \frac{a}{R} \sin \psi + \frac{\mathcal{R}^2}{11\,520} r' \frac{a}{R} \sin \psi (19 - 21 r'^2 + 9 r'^4 - r'^6) \right].\end{aligned}$$

Où l'on a posé :

$$W_1 = Aa^2$$

(vitesse maximum au centre du tube pour un tuyau rectiligne) :

$$\begin{aligned}r' &= \frac{r}{a}; \\ \mathcal{R} &= \frac{aW_1}{\nu} = \frac{Aa^3}{\nu}.\end{aligned}$$

La discussion montre que ces expressions ne peuvent être valables quand  $\mathcal{R}$  est grand. En particulier il faut que :

$$\frac{\mathcal{R}}{72} \cdot \frac{a}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\mathcal{R}^2}{1\,515} \cdot \frac{a}{R}$$

soient inférieurs à 1.

Ces calculs ne peuvent pas nous apporter beaucoup de renseignements puisque nous nous intéressons aux grandes valeurs de  $\mathcal{R}$ .

## ANNEXE III

# ÉTUDE MATHÉMATIQUE DU MANOMÈTRE A BULLE D'AIR COMPRIMÉE (PHYSALIMANOMÈTRE)

Une bulle d'air de longueur  $l_2$ , limitée par un index liquide de longueur  $l_1$ , se trouve enfermée dans un tube cylindrique clos à une extrémité.

Le diamètre  $d$  du tube est petit, de manière à pouvoir négliger les forces de pesantour devant les forces de capillarité (fig. 78).



Fig. 78

La pression moyenne de l'air dans la bulle est  $p_0$ . Elle varie de  $\Delta p$  autour de cette valeur moyenne. Le niveau du ménisque défini par l'élongation  $I$ , à partir de la position moyenne, est donné par l'équation suivante :

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \Delta p.$$

Les coefficients  $R$ ,  $L$ , et  $C$  dépendent du nombre sans dimension  $m$  <sup>(1)</sup> :

$$m = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{2\pi n}{\mu}} \rho;$$

$n = \frac{\omega}{2\pi}$  étant la fréquence imposée par  $\Delta p$ ; période correspondante  $T$ .

Nous avons, en posant :

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{32\mu l_1}{d^2}, & L_\infty &= \rho l_1, & \frac{1}{C} &= \frac{p_0}{l_2}; \\ \frac{R}{R_0} &= f(m), & \frac{L}{L_\infty} &= \varphi(m); \end{aligned}$$

(1) Pour plus de détails se référer à la thèse de M. VALEMBOS, Grenoble, 1948, ou à *Contribution à l'étude de la mesure des pressions variables*, du même auteur, Actualités Scientifiques et Industrielles, n° 1047 (Hermann, Paris).

$f(m)$  et  $\varphi(m)$  étant des fonctions universelles, connues, de  $m$  (voir tableau I, page 115);

$f(m) = f$  varie de 1 à l' $\infty$  quand  $m$  varie de 0 à l' $\infty$ ;

$\varphi(m) = \varphi$  varie de  $\frac{4}{3}$  à 1 quand  $m$  varie de 0 à l' $\infty$ .

Nous avons, d'autre part :

$$R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \sqrt{\frac{\varphi \rho l_1 p_0}{l_2}}$$

c'est la résistance critique;

$$N = \frac{1}{2 \pi \sqrt{LC}} = \frac{\sqrt{p_0}}{2 \pi \sqrt{\varphi \rho l_1 l_2}}$$

c'est la fréquence d'oscillation propre, non amortie, de période correspondante  $T_N$ .

Nous allons établir entre les quantités  $\alpha = \frac{R_0}{R_c}$ ,  $\beta = \frac{n}{N}$  et  $m$  une relation générale, indépendante des caractéristiques du manomètre. Posons :

$$(1) \quad \alpha = \frac{R_0}{R_c} = \frac{16 \mu}{d^2} \sqrt{\frac{l_1 l_2}{\varphi \rho p_0}};$$

$$(2) \quad \beta = \frac{n}{N} = \frac{T_N}{T} = 2 \pi \sqrt{\frac{\varphi \rho l_1 l_2}{p_0}} \times n;$$

$$(3) \quad m = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{2 \pi n \rho}{\mu}}.$$

Nous avons :

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\frac{n}{N}}{\frac{R_0}{R_c}} = \frac{n \cdot 2 \pi \sqrt{LC}}{\frac{R_0}{2 \sqrt{\frac{L}{C}}}} = 2 \pi n \frac{L}{R_0} = 4 \pi n \varphi \frac{L_\infty}{R_0}$$

et :

$$m^2 = \frac{d^2}{4} \frac{2 \pi n \rho}{\mu}.$$

Faisons :

$$\frac{\beta}{m^2} = \frac{4 \pi n \varphi \frac{L_\infty}{R_0}}{\frac{d^2}{4} \frac{2 \pi n \rho}{\mu}} = 8 \varphi \frac{L_\infty}{R_0} \frac{\mu}{\rho d^2};$$

or :

$$\frac{L_\infty}{R_0} = \frac{\rho l_1}{32 \mu l_2} = \frac{1}{32} \frac{\rho d^2}{\mu}.$$

En éliminant  $\frac{L_\infty}{R_0}$  entre ces deux équations, on tire :

$$\frac{\beta}{m^2} = \frac{\varphi}{4}.$$

TABLEAU I

| $m$ | $m^4$             | $\frac{L}{L_{\infty}} = \frac{f}{\dot{\varphi}(m)}$ | $\frac{A}{m^4 \dot{\varphi}(m)}$ | $\frac{f(m)}{\frac{R}{R_0}}$ | $f^2(m)$ | $64 \frac{f^2}{\dot{\varphi}}$ | $\frac{64 \frac{f^2}{\dot{\varphi}}}{K^2} = \frac{f^2}{m^4 \dot{\varphi}}$ | $1 + K^2$ | $(m^4 \dot{\varphi})^2$ | $B = (m^4 \dot{\varphi})^2 (1 + K^2)$ | $\frac{1}{1 + K^2}$  | $\frac{K^2}{1 + K^2}$ |
|-----|-------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------|------------------------------|----------|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|-----------|-------------------------|---------------------------------------|----------------------|-----------------------|
| 0   | 0                 | 1,333                                               | 0                                | 1                            | 1        | 48                             | $\infty$                                                                   | $\infty$  | 0                       | 0                                     | 0                    | 1                     |
| 0,5 | 0,06              | 1,333                                               | 0,083                            | 1                            | 1        | 48                             | 576                                                                        | 577       | $6,94 \cdot 10^{-4}$    | 0,401                                 | $1,75 \cdot 10^{-3}$ | $9,98 \cdot 10^{-1}$  |
| 1   | 1                 | 1,333                                               | 1,333                            | 1                            | 1        | 48                             | 36                                                                         | 37        | 1,77                    | 65,5                                  | $2,62 \cdot 10^{-2}$ | $9,72 \cdot 10^{-1}$  |
| 1,5 | 5,06              | 1,332                                               | 6,74                             | 1                            | 1        | 48                             | 7,125                                                                      | 8,125     | 45,43                   | 368                                   | $1,23 \cdot 10^{-1}$ | $8,77 \cdot 10^{-1}$  |
| 2   | 16                | 1,330                                               | 21,28                            | 1,01                         | 1,02     | 48,6                           | 2,282                                                                      | 3,282     | 453                     | $1,49 \cdot 10^3$                     | $3,05 \cdot 10^{-1}$ | $6,95 \cdot 10^{-1}$  |
| 2,5 | 39                | 1,324                                               | 51,7                             | 1,03                         | 1,061    | 51,25                          | 0,993                                                                      | 1,993     | $2,67 \cdot 10^3$       | $5,33 \cdot 10^3$                     | $5,02 \cdot 10^{-1}$ | $4,98 \cdot 10^{-1}$  |
| 3   | 81                | 1,316                                               | 106,6                            | 1,06                         | 1,124    | 54,6                           | 0,512                                                                      | 1,512     | $11,3 \cdot 10^3$       | $17,08 \cdot 10^3$                    | $6,62 \cdot 10^{-1}$ | $3,39 \cdot 10^{-1}$  |
| 3,5 | 151               | 1,305                                               | 196                              | 1,11                         | 1,232    | 60,5                           | 0,309                                                                      | 1,309     | $3,84 \cdot 10^3$       | $50,25 \cdot 10^3$                    | $7,65 \cdot 10^{-1}$ | $2,22 \cdot 10^{-1}$  |
| 4   | 256               | 1,290                                               | 330                              | 1,17                         | 1,369    | 67,9                           | 0,205                                                                      | 1,205     | $1,09 \cdot 10^5$       | $13,1 \cdot 10^4$                     | $8,33 \cdot 10^{-1}$ | $1,7 \cdot 10^{-1}$   |
| 4,5 | 410               | 1,272                                               | 522                              | 1,24                         | 1,538    | 77,3                           | 0,148                                                                      | 1,148     | $2,72 \cdot 10^5$       | $31,3 \cdot 10^4$                     |                      |                       |
| 5   | 625               | 1,254                                               | 784                              | 1,32                         | 1,742    | 88,9                           | 0,113                                                                      | 1,113     | $6,15 \cdot 10^5$       | $68,5 \cdot 10^4$                     |                      |                       |
| 5,5 | 915               | 1,236                                               | 1130                             | 1,41                         | 1,989    | 103                            | 0,091                                                                      | 1,091     | $1,28 \cdot 10^6$       | $14 \cdot 10^5$                       |                      |                       |
| 6   | 1296              | 1,220                                               | 1580                             | 1,50                         | 2,250    | 118                            | 0,075                                                                      | 1,075     | $2,5 \cdot 10^6$        | $26,8 \cdot 10^5$                     |                      |                       |
| 8   | 4096              | 1,170                                               |                                  | 1,83                         | 3,349    |                                |                                                                            |           |                         |                                       |                      |                       |
| 10  | $10^4$            | 1,140                                               |                                  | 2,18                         | 4,752    |                                |                                                                            |           |                         |                                       |                      |                       |
| 15  | $5,06 \cdot 10^4$ | 1,093                                               |                                  | 3,04                         | 9,240    |                                |                                                                            |           |                         |                                       |                      |                       |
| 20  | $16 \cdot 10^4$   | 1,070                                               |                                  | 3,93                         | 15,445   |                                |                                                                            |           |                         |                                       |                      |                       |

TABLEAU II

| $m$ | $h = 1$  | $a_{\infty} = 4$         | $h = \frac{1}{16}$   | $a_{\infty} = 1$      | $h = 10^{-2}$        | $a_{\infty} = 4 \cdot 10^{-1}$ | $h = 2 \cdot 10^{-2}$ | $a_{\infty} = 5,66 \cdot 10^{-1}$ | $h = 3 \cdot 10^{-2}$ | $a_{\infty} = 6,9 \cdot 10^{-1}$ |
|-----|----------|--------------------------|----------------------|-----------------------|----------------------|--------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|-----------------------|----------------------------------|
|     | $x = Ah$ | $\frac{y-1}{Eh^2 - 2Ah}$ | $x$                  | $y-1$                 | $x$                  | $y-1$                          | $x$                   | $y-1$                             | $x$                   | $y-1$                            |
| 0   | 0        | 0                        | 0                    | 0                     | 0                    | 0                              | 0                     | 0                                 | 0                     | 0                                |
| 0,5 | 0,083    | 0,23                     | $5,2 \cdot 10^{-3}$  | $-8,84 \cdot 10^{-3}$ | $8,33 \cdot 10^{-4}$ | $-1,6 \cdot 10^{-2}$           | $16,6 \cdot 10^{-4}$  | $-31,7 \cdot 10^{-4}$             | $0,25 \cdot 10^{-2}$  | $-0,5 \cdot 10^{-2}$             |
| 1   | 1,333    | 62,8                     | $8,34 \cdot 10^{-2}$ | $8,9 \cdot 10^{-2}$   | $1,33 \cdot 10^{-2}$ | $-2 \cdot 10^{-2}$             | $2,66 \cdot 10^{-2}$  | $-2,7 \cdot 10^{-2}$              | $3,4 \cdot 10^{-2}$   | $-2 \cdot 10^{-2}$               |
| 1,5 | 6,74     | 3,55                     | $4,21 \cdot 10^{-1}$ | 0,6                   | $6,74 \cdot 10^{-2}$ | $-9,8 \cdot 10^{-2}$           | $13,5 \cdot 10^{-2}$  | $-12,2 \cdot 10^{-2}$             | $19,2 \cdot 10^{-2}$  | $-5,3 \cdot 10^{-2}$             |
| 2   | 21,28    | $1,45 \cdot 10^3$        | 1,33                 | 2,66                  | $2,13 \cdot 10^{-1}$ | $-2,8 \cdot 10^{-1}$           | $4,26 \cdot 10^{-1}$  | $-2,3 \cdot 10^{-1}$              | $6,4 \cdot 10^{-1}$   | $-7 \cdot 10^{-2}$               |
| 2,5 | 51,7     | $5,23 \cdot 10^3$        | 3,23                 | 13,6                  | $5,17 \cdot 10^{-1}$ | $-5 \cdot 10^{-1}$             | 1,034                 | $7,4 \cdot 10^{-2}$               | $15,5 \cdot 10^{-1}$  | 1,7                              |
| 3   | 106,6    | $17 \cdot 10^3$          | 6,65                 | 53,2                  | 1,066                | $-4,3 \cdot 10^{-1}$           | 2,13                  | 2,54                              | 3,19                  | 9                                |
| 3,5 | 196      | $5 \cdot 10^4$           | 12,25                | 166,5                 | 1,96                 | + 1,1                          |                       |                                   |                       |                                  |
| 4   | 330      | $13 \cdot 10^4$          | 20,6                 | 469                   | 3,30                 | 6,5                            |                       |                                   |                       |                                  |
| 4,5 | 522      | $31,2 \cdot 10^4$        | 32,6                 | 1150                  | 5,22                 | 20,8                           |                       |                                   |                       |                                  |
| 5   | 784      | $6,85 \cdot 10^5$        | 49                   | 2600                  | 7,84                 | 52,8                           |                       |                                   |                       |                                  |
| 5,5 | 1130     | $14 \cdot 10^5$          | 70,5                 | 5300                  | 11,3                 | 117,4                          |                       |                                   |                       |                                  |
| 6   | 1580     | $26,8 \cdot 10^5$        | 99,4                 | 10300                 | 15,8                 | 236,4                          |                       |                                   |                       |                                  |

La relation cherchée est :

$$(4) \quad m^2 \varphi(m) = 4 \frac{\beta}{\alpha},$$

ou :

$$m^2 \varphi(m) = 4 \cdot \frac{n}{N} \cdot \frac{R_c}{R_0}.$$

Cette relation, indépendante des manomètres de ce type, ne dépend pas non plus de  $p_0$ , de sorte que le paramètre sans dimension  $m$ , qu'on dit caractéristique du type d'écoulement laminaire du liquide, n'est qu'une fonction de  $\frac{\beta}{\alpha}$ .

Nous savons, d'autre part, que la réponse d'un système à un degré de liberté est donnée par l'équation (1) :

$$(5) \quad y = x^2 + 2x(2z - 1) + 1;$$

en posant :

$$y = \left(\frac{Ist}{I_0}\right)^2, \quad x = \left(\frac{T_N}{T}\right)^2 = \left(\frac{n}{N}\right)^2 = \beta^2, \quad z = \left(\frac{R}{R_c}\right)^2;$$

$Ist$  est l'indication qui correspondrait à  $\Delta p$  en régime statique :  $Ist = C \Delta p$ .

Si  $z$  était constant, l'équation (5) représenterait une parabole, mais ici  $z$  varie avec  $x$ , en effet :

$$z = \left(\frac{R}{R_c}\right)^2 = \left(\frac{R}{R_0} \times \frac{R_0}{R_c}\right)^2 = f_{(m)}^2 \times \alpha^2,$$

donc :

$$\alpha = \frac{\sqrt{z}}{f}.$$

La relation (4) donne donc :

$$m^2 \varphi = 4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{z}} \cdot f;$$

$$z = x \times \frac{16 f^2}{m^4 \varphi^2};$$

ou :

$$(6) \quad z = 16 x \left(\frac{f}{m^2 \varphi}\right)^2.$$

$z$  varie bien avec  $x$ .

Portons cette valeur de  $z$  dans l'équation (5) nous tirons :

$$y = x^2 + 2x \left(2 \cdot \frac{16 x f^2}{m^4 \varphi^2} - 1\right) + 1;$$

ou :

$$y = x^2 \left[1 + 64 \left(\frac{f}{m^2 \varphi}\right)^2\right] - 2x + 1.$$

Nous avons de plus :

$$x = \beta^2 = \frac{4 \pi^2 n^2 \varphi \rho l_1 l_2}{p_0};$$

or :

$$n = \frac{2 m^2}{\pi} \frac{\mu}{\rho d^2};$$

donc :

$$x = 16 m^4 \varphi \frac{l_1 l_2}{p_0} \frac{\mu^2}{\rho d^4};$$

posons :

$$(7) \quad x = h m^4 \varphi;$$

avec :

$$h = \frac{16 l_1 l_2}{p_0} \frac{\mu^2}{\rho d^4} = \frac{\alpha_\infty^2}{16} = \frac{\alpha_0^2}{12};$$

avec :

$$\alpha_\infty = \left( \frac{R}{R_c} \right)_{m=\infty} \quad \text{et} \quad \alpha_0 = \left( \frac{R}{R_c} \right)_{m=0};$$

$h$  est la *constante du manomètre*.

C'est la seule quantité qui caractérise le manomètre et qui entre en ligne de compte, elle est naturellement indépendante de  $m$ .

Si les quantités  $L$  et  $R$  ne variaient pas avec  $m$ , donc avec la fréquence  $n$  d'oscillation,  $\frac{R}{R_c}$  serait constant et l'on aurait justement :

$$\frac{R}{R_c} = \alpha_0 = \sqrt{12} h = \text{Cte};$$

c'est-à-dire :

$$z_0 = 12 h.$$

Nous poserons aussi :

$$(8) \quad K^2 = 64 \left( \frac{f}{m^2 \varphi} \right)^2,$$

c'est une fonction de  $m$  seulement, indépendante du manomètre.

L'équation (5) est donc donnée sous la forme suivante :

$$(7) \text{ ou } (9) \quad x = h m^4 \varphi;$$

$$(10) \quad y = h^2 (m^4 \varphi)^2 (1 + K^2) - 2 h m^4 \varphi + 1.$$

Nous avons ainsi la courbe de réponse du manomètre (amplitude — fréquence) sous forme paramétrique ( $x$  et  $y$  étant exprimés en fonction de  $m$ ). Il n'est pas possible de donner cette courbe de réponse sous forme explicite  $y = y(x)$ , car les quantités  $f(m)$  et  $\varphi(m)$  ne sont pas explicitées en fonction de  $m$ . Pour les grandes valeurs de  $m$  seulement on pourrait le faire car on a comme valeurs approximatives :

$$\text{pour } m \text{ grand (par ex. } m \geq 100) \quad \left\{ \begin{array}{l} f(m) \approx 0,177 m, \\ \varphi(m) \approx 1. \end{array} \right.$$

On peut remarquer que, dans les équations (9) et (10), les deux seules fonctions de  $m$  qui interviennent dans les calculs sont :

$$m^4 \varphi \quad \text{et} \quad \frac{f}{m^2 \varphi} \quad (\text{ou encore } m^4 \varphi \text{ et } m^2 f)$$

et non les trois quantités  $m$ ,  $f$  et  $\varphi$  séparément.

### Étude de la courbe de réponse.

Faisons le changement de coordonnées défini par :

$$\begin{aligned} x &= X = hm^4 \varphi; \\ y - 1 &= Y = h^2 m^8 \varphi^2 (1 + K^2) - 2 hm^4 \varphi; \end{aligned}$$

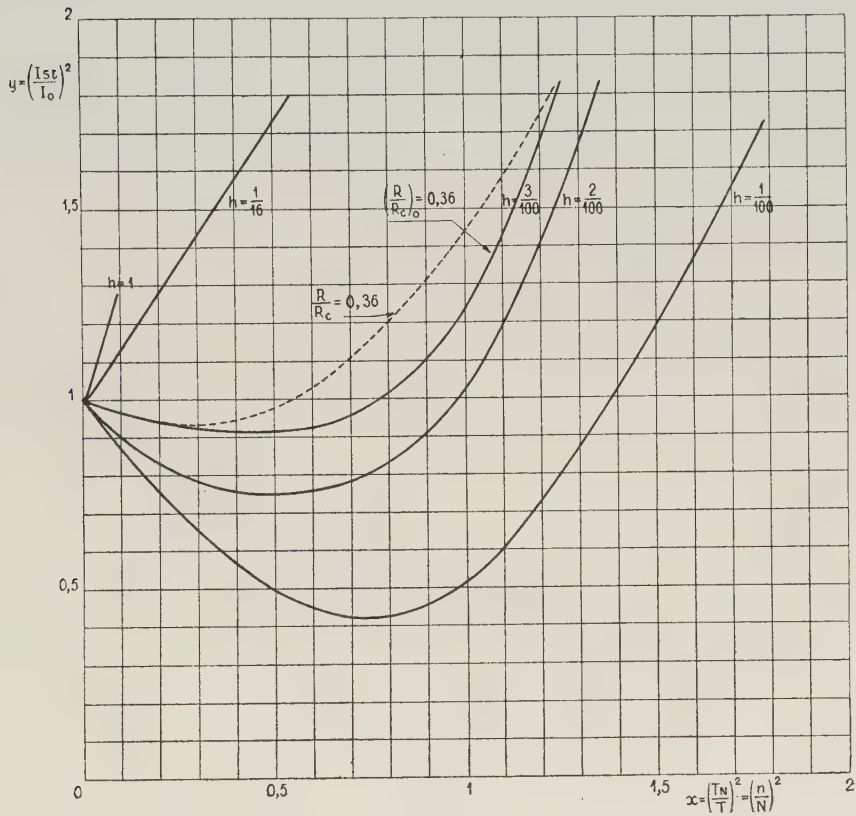


Fig. 79

il vient :

$$Y = hm^4 \varphi \left[ hm^4 \varphi + 64 h \frac{f^2}{\varphi} - 2 \right];$$

$Y$  s'annule pour :

$$m = 0$$

et pour :

$$hm^4 \varphi + 64 h \frac{f^2}{\varphi} - 2 = 0;$$

d'où  $m$  connaissant  $h$ .

Pour  $m = 0$ ,  $Y = X = 0$  en ce point la tangente à la courbe est :

$$\left(\frac{Y}{X}\right)_{m \rightarrow 0} = \left(hm^4 \varphi + 64 h \frac{l^2}{\varphi} - 2\right)_{m \rightarrow 0}.$$

Quand  $m \rightarrow 0$  ni  $\varphi$  ni  $\frac{l^2}{\varphi}$  ne s'annulent,  $\frac{l^2}{\varphi}$  tend vers  $\frac{3}{4}$ , Donc :

$$\left(\frac{Y}{X}\right)_{m=0} = 48 h - 2.$$

Pour  $X = 1$  nous avons :

$$X = 1 = hm^4 \varphi;$$

$$Y = K^2 - 1;$$

ou :

$$y = K^2 = 64 h \frac{l^2}{\varphi}.$$

On peut maintenant tracer les courbes de réponse du manomètre (*fig. 79*).

Elles sont plus aplaties au voisinage de  $y = 1$  que celles d'un système oscillant ordinaire classique et, par suite, permettent de faire des lectures dans un domaine de fréquence plus étendu.

### Fréquence propre d'oscillation non amortie.

On la déduit de l'équation (2) où l'on fait  $n = N$  soit :

$$\beta = 1 \quad \text{ou} \quad \beta^2 = x = 1,$$

Donc :

$$x = hm^4 \varphi = 1;$$

soit :

$$m^4 \varphi = \frac{1}{h} = \frac{c}{\mu^2} \frac{d^4}{16 l_1 l_2} \frac{p_0}{l_2},$$

on en tire  $m$  à l'aide des courbes de la *figure 80*.

### Étude des paraboles $m = C^{\text{te}}$ (*fig. 81*).

Les équations (9) et (10) donnent encore :

$$\begin{cases} x = hm^4 \varphi; \\ y = x^2 (1 + K^2) - 2x + 1. \end{cases}$$

Pour chaque valeur de  $m$ , le point correspondant se trouve à l'intersection de la parallèle à  $oy$  :

$$x = hm^4 \varphi$$

et de la parabole :

$$y = x^2 (1 + K^2) - 2x + 1$$

(puisque  $K^2$  est aussi constant).

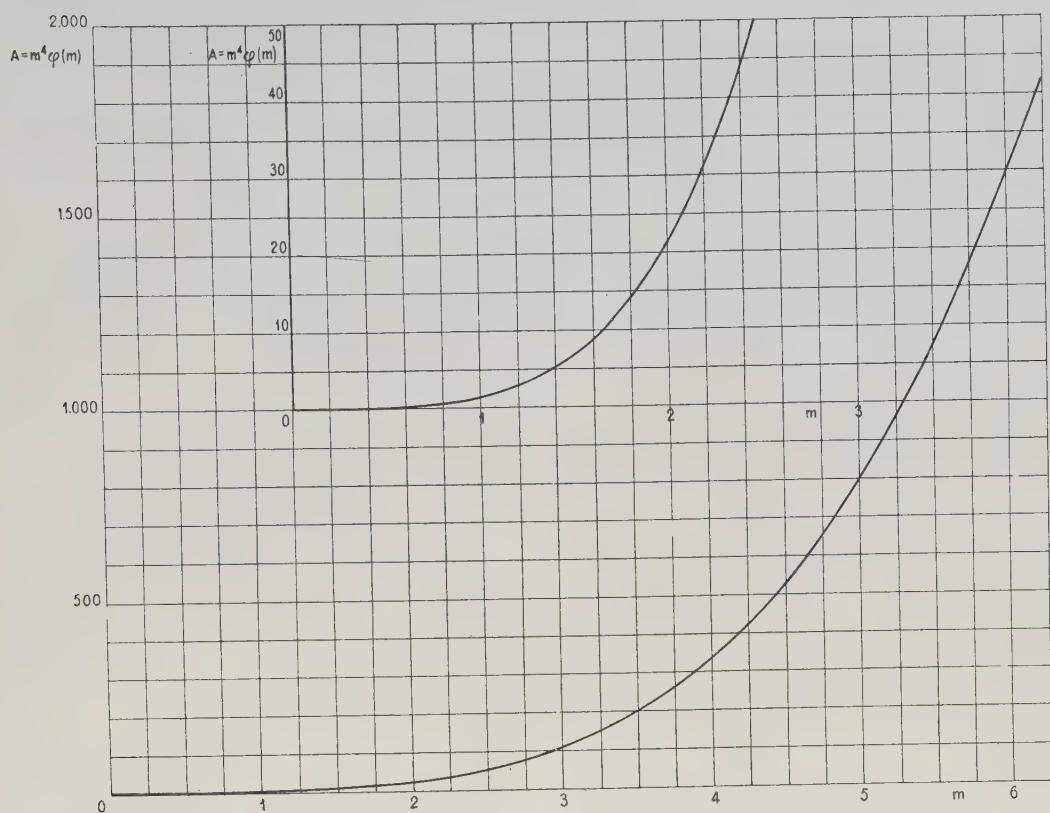


Fig. 80

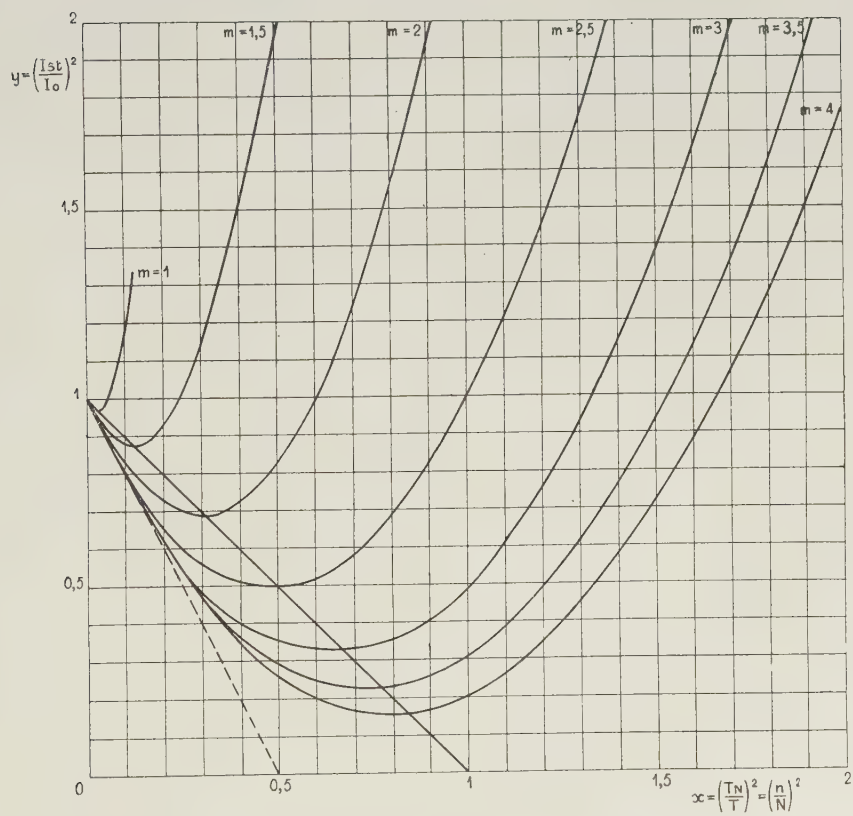


Fig. 81

Nous avons donc une famille de paraboles :

$$(\mathcal{P}_{(m)}) \quad y = x^2 (1 + K^2) - 2x + 1$$

dépendant du paramètre  $K$ .

Toutes ces paraboles passent par le point  $x = 0, y = 1$  et, en ce point, admettent toutes la même tangente de pente  $-2$ .

Le minimum correspond à :

$$x_M = \frac{1}{1 + K^2};$$

$$y_M = \frac{K^2}{1 + K^2}.$$

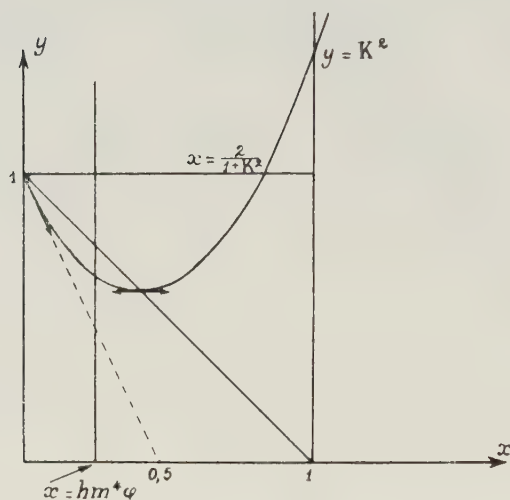


Fig. 82. — Parabole  $\mathcal{P}_{(m)}$

Le lieu des minima est la droite  $x + y = 1$ . La parabole  $\mathcal{P}(m)$  coupe la droite  $x = 1$  au point (fig. 82) :

$$x = 1;$$

$$y = K^2$$

et la droite  $y = 1$  au point :

$$y = 1;$$

$$x = \frac{2}{1 + K^2}.$$

## RENSEIGNEMENTS BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] O. REYNOLDS. — *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, vol. 174, p. 935 (1883); ou bien *Scientific Papers*, II, p. 51.
- [2] BARNES et COKER. — *Proc. Roy. Soc.*, London, vol. 74 (1905).
- [3] COKER et CLÉMENT. — *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London (A), vol. 201, p. 45 (1903).
- [4] W. EKMAN. — *Ark f. Math. Astro. Och. Fisik*, vol. 6, n° 12 (1911).
- [5] SCHILLER. — *Zeit. f. Ang. Math. und Mech.* (années 1922 et suivantes).
- [6] DARRIEUS. — *La Technique moderne*, t. 30, n° 18 (1938); t. 31, n° 15 (1939); t. 33, n°s 21 et 22 (1941).
- [7] R. COMOLET. — *C. R.*, t. 227, p. 892 (1948).
- [8] C. B. MILLIKAN. — *Trans. Amer. Soc. Mech. Eng. Applied Mechanics* (1932).
- [9] R. COMOLET. — *C. R.*, t. 226, p. 2049 (1948).
- [10] SACKMAN. — *C. R.*, t. 224, p. 793 et p. 1326 (1947); t. 226, p. 1248, p. 1343 et p. 1887 (1948).
- [11] A. V. SAPH et E. W. SCHODER. — *Trans. Amer. Soc. Civ. Eng.*, vol. 47 (1902), p. 295.
- [12] J. H. GRINDLEY et A. H. GIBSON. — *Proc. Roy. Soc.*, London (A), vol. 80, p. 114 (1908).
- [13] J. EUSTICE. — *Proc. Roy. Soc. London (A)*, vol. 84, p. 107 (1910); vol. 85, A, p. 119 (1911); *Engineering*, vol. 120 (1925).
- [14] G. I. TAYLOR. — *Proc. Roy. Soc.*, London (A), vol. 124, p. 243 (1929).
- [15] H. NIPPERT. — *Forsch. Arb. Ing., Wes.*, n° 320 (1929).
- [16] D. THOMA. — *World Power Conference Sect. Meeting*, n° 26 (Tokyo, 1929).
- [17] H. RICHTER. — *Forsch. Arb. Ing. Wes.*, n° 338 (1930).
- [18] M. ADLER. — *Z. A. M. M.*, vol. 14, p. 257 (oct. 1934).
- [19] W. R. DEAN. — *Phil. Mag.* (7), vol. 4, p. 208 (1927); vol. 5, p. 673 (1928).
- [20] C. M. WHITE. — *Proc. Roy. Soc.*, London (A), vol. 123 (1929), p. 645.
- [21] COMOLET. — *C. R.*, t. 229, p. 342 (1949).
- [22] PIOTR SZYMANSKI. — *Travaux de l'Institut Aérodynamique de Varsovie*, fasc. VI (1932).
- [23] A. ROSENBLATT. — *Mémorial des Sciences mathématiques*, n° 72 (Paris, 1935).
- [24] JEFFERY. — *Phil. Mag.* (6), t. 29, p. 445 et 455 (1915).
- [25] HAMEL. — *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, t. 25, p. 34 (1916).
- [26] M. ABRAMOWITZ. — *Journal of Math. and Physics*, vol. 28, n° 1 (1949).
- [27] S. GOLDSTEIN. — *Modern developments in Fluid Dynamics*, vol. 1, p. 105 (Oxford, 1938).
- [28] W. TOLLMIEH. — *Handbuch der Experimental-physik*, t. 4, 1<sup>re</sup> partie, p. 257 (Leipzig, 1931).

- [29] BLASIUS. — *Z. A. M. M.*, vol. 58, p. 225 (1910).
- [30] PATTERSON. — *Canadian Journal of Research*, vol. 11, p. 770 (1934); vol. 12, p. 676 (1935).
- [31] FROMM. — *Z. A. M. M.*, vol. 3, p. 339 (1923).
- [32] DAVIES, MECH et WHITE. — *Proc. Roy. Soc., London (A)*, vol. 119, p. 92 (1928).
- [33] FAGE. — *Proc. Roy. Soc., London (A)*, vol. 165, p. 501 (1938).
- [34] LIN. — *Quarterly of Applied mathematics*, vol. III, n° 2, p. 117 (1945); vol. III, n° 3, p. 218 (1945); vol. III, n° 4, p. 277 (1946).
- [35] A. FORTIER. — *Viscosité et Turbulence* (Centre de perfectionnement technique, fasc. n° 1542, 21 nov. 1945).
- [36] SIN-ITI HATTORI. — *Report of the aeronautical research institute* (Tokyo Imperial University, n° 115, vol. IX, 1935).



IMPRIMERIE

DEUXIÈME THÈSE

---

Propositions données par la Faculté

---

INFLUENCE DE LA VISCOSITÉ  
SUR  
LA PROPAGATION DES ONDES DE PRESSION  
DANS LES CONDUITES

---

Vu et approuvé :

*Paris, le 8 juin 1950.*

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

*A. CHATELET.*

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

*Jean SARRAILH.*







IMPRIMERIE